DISTRIBUCIÓN DE AGUA PARA REGADÍOS

Mª Dolores SOTO TORRES
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid

1.- INTRODUCCIÓN.

El agua, un recurso natural en el que las condiciones climáticas determinan su grado de escasez, tiene una problemática asociada a sus utilidades. Cumplido el objetivo prioritario del abastecimiento humano, su utilización tiene que tender a garantizar un equilibrio entre sus usos para fines productivos dentro de todos los sectores y los requerimientos medio ambientales, como sostenimiento y mejora de ecosistemas o actividades recreativas, englobando los denominados usos sociales del agua. Dentro de las finalidades productivas se encuentra su utilización en regadíos, situados normalmente en zonas donde el recurso tiene un cierto grado de escasez y que requieren grandes consumos de agua, por ello, la demanda de nuevas superficies de regadío deberá de estar condicionada a la disponibilidad de recursos para ese fin con objeto de garantizar la imprescindible sostenibilidad. Supuesto el cumplimiento de la finalidad básica y medio ambiental, recogidos en los objetivos del Plan Nacional de Saneamiento y Depuración de Aguas Residuales, un problema asociado al agua destinado a regadíos es su reparto en el espacio y en el tiempo.

En este trabajo se analiza la distribución de agua en el tiempo entre dos comunidades de regantes que se abastecen de un mismo embalse. Se supone que el intervalo de tiempo durante el que se pretende realizar el riego es idéntico para ambas comunidades, tienen los mismos costes para la utilización del agua en sus regadíos y unas previsiones instantáneas de riego idénticas, siendo por tanto, su objetivo durante la época de riego, minimizar las desviaciones de riego instantáneas respecto al objetivo propuesto. Una desviación por exceso o por defecto de ese objetivo, para cualquiera de las comunidades, proporcionaría la misma utilidad, de ahí que al formalizar el proceso, se considere una función objetivo cuadrática. Los consumos para ambas comunidades serán no negativos, pero no podrán superar cada una de ellas a una proporción del agua que instantáneamente tenga el embalse. La proporción vendrá determinada por la Administración, obedeciendo a razones ambientales, teniendo en cuenta las exigencias para la protección y conservación del recurso y su entorno, como recoge la Ley 29/1985 de Aguas en la sección primera del capítulo III. Se supondrá, además que el caudal del que se abastecen las dos comunidades varía instantáneamente, por la diferencia entre aportaciones y salidas de corrientes naturales y por los consumos de ambas comunidades.

El problema de la distribución del agua con los supuestos anteriores, puede plantearse como un juego donde cada comunidad representará a un jugador. El juego de horizonte finito que coincide con el periodo en el que se pretende regar, es de suma no nula ya que lo que un jugador gana el otro no lo pierde, además, puede plantearse en tiempo continuo, pues el stock de agua en el embalse puede determinarse de forma instantánea conociendo el caudal y los consumos. Planteado el juego diferencial, pueden encontrarse distintas soluciones de equilibrio cooperativas o no cooperativas. Este trabajo analiza una solución cooperativa al problema de la distribución del agua entre las dos comunidades, que solicitando concesión son igualmente preferidas por la Administración o bien, una de ellas, tiene preferencia en la utilización del agua por proporcionar una mayor utilidad general o ser poseedora de técnicas que redundan en un menor consumo del recurso. La primera situación, puede interpretarse en teoría de juegos cooperativos como que ambas comunidades tienen el mismo poder en el proceso de negociación, mientras que la segunda situación, consideraría la posibilidad de que ese poder fuese diferente.

El trabajo, que como el de Kaitala V., Hämäläinen R. y Ruusunen J. (pág. 593), formaliza el problema de la distribución de un recurso desde el punto de vista de su disponibilidad, sin considerar el coste asociado a su utilización, se ha dividido en cuatro secciones. La segunda se ocupa de la formulación y planteamiento del modelo. Las dos siguientes determinan la distribución óptima cuando el proceso de negociación no es igualitario y cuando ambas comunidades tienen el mismo poder en el proceso de negociación. Las distribuciones óptimas del recurso dependerán de los parámetros del modelo, del stock de agua en el momento inicial y del tiempo durante el que se pretende realizar el riego. El trabajo finaliza con un análisis de los resultados.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, designando por $\bar{u}$ la cantidad de agua que instantáneamente pretenden obtener cada una de las dos comunidades y por $u_i(t)$, $i = 1,2$, lo que obtienen en cada momento, el objetivo de cada comunidad durante el horizonte de planificación, puede expresarse:

$$\min_{u_i(t)} \; J_i(t) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[u_i(t) - \bar{u}\right]^2 dt,$$

donde las cantidades dispuestas $u_i(t)$ serán no negativas y tendrán como límite el impuesto por la Administración, de forma que si $x(t)$ es el stock de agua disponible en el momento t, cada comunidad podrá consumir a lo sumo en cada momento $\alpha x(t)$ con $2\alpha \in (0,1)$. El stock de agua variará según la ecuación:

$$\dot{x}(t) = g - u_1(t) - u_2(t), \qquad (1)$$

donde g es el resultado de los flujos instantáneos de entradas y salidas naturales en el embalse, que se supone positivo y constante, por razones operativas, durante el periodo de planificación.

Si las dos comunidades de regantes pretenden una solución negociada al problema de la distribución del agua, ambas podrían actuar como una única comunidad, resolviendo el problema para un único agente incluyendo la posibilidad de que una de ellas tenga mayor poder en el proceso de negociación. La solución óptima se encontrará resolviendo el problema:

$$\min_{\{u_1(t),\, u_2(t)\}} \frac{1}{2}\int_0^T \left[\lambda\,[u_1(t)-\bar{u}]^2 + (1-\lambda)[u_2(t)-\bar{u}]^2\right] dt\,, \qquad (2)$$

donde los consumos instantáneos deben satisfacer las restricciones anteriormente consideradas $0 \le u_i(t) \le \alpha\, x(t)$, $i = 1,2$, y el stock de agua verificará la ecuación (1). El parámetro $\lambda \in (0,1)$ de la expresión (2) recoge el poder en el proceso de negociación de una comunidad sobre la otra, en particular, ambas comunidades seguirán un proceso de distribución igualitario si $\lambda = 1/2$.

Para resolver el problema planteado se utilizan las condiciones necesarias del principio del máximo (Seierstad A. y Sydsaeter K., pág. 275), que llevan a considerar un nuevo problema no lineal estático:

$$\max_{\{u_1(t),\, u_2(t)\}} -\frac{1}{2}\left[\lambda\,[u_1(t)-\bar{u}]^2 + (1-\lambda)[u_2(t)-\bar{u}]^2\right] + \psi(t)\,[g-u_1-u_2],$$

que permitirá encontrar los consumos posibles instantáneos para ambas comunidades durante el horizonte de planificación. La variable de coestado $\psi(t)$, asociada a la variación instantánea del stock de agua, satisface junto a la condición terminal $\psi(T) = 0$, la ecuación diferencial:

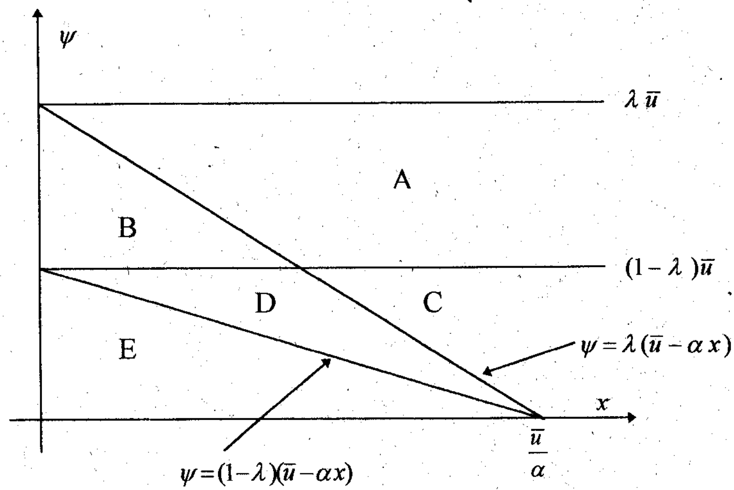
$$-\dot{\psi}(t) = \alpha\,[\alpha_1(t) + \beta_1(t)],$$

donde $\alpha_1(t)$ y $\beta_1(t)$, no negativos, son los multiplicadores de Kuhn-Tucker asociados a las restricciones, no de signo, de los controles $u_1(t), u_2(t)$, respectivamente, del problema estático no lineal.

Las condiciones necesarias del principio del máximo para el problema propuesto, son también suficientes (Seierstad A. y Sydsaeter K., pág. 287), por tanto, las condiciones para la admisibilidad de las distribuciones de las dos comunidades, determinarán las de su optimalidad. La siguiente sección analiza estas posibilidades, centrándose el estudio en el plano de fase determinado por las variables de estado y coestado; por ello, de ahora en adelante se prescinde de la dependencia explícita de las variables respecto al tiempo.

3.- ESTRATEGIAS OPTIMAS. PREFERENCIA PARA UN JUGADOR.

Supongamos que la comunidad denotada por uno tiene mayor poder en el proceso de negociación, entonces el parámetro de ponderación λ, de la expresión (2), superará a 1/2. En este caso, desde la resolución del problema estático no lineal se encuentran cinco posibilidades sobre la distribución del agua que corresponden a regiones específicas del plano (x,ψ) donde siempre la variable de coestado es no creciente. En la gráfica 1 se recogen estas regiones. Los consumos asociados a ellas no son nunca consumos nulos para ambas comunidades, pues esa posibilidad aunque es factible, no es óptima. El análisis de la dinámica asociada a cada una de las cinco regiones determinará el reparto óptimo que dependerá de la amplitud del horizonte de planificación y de los valores que alcancen los parámetros que intervienen en el modelo.



Gráfica 1

La región A, donde el reparto en cualquier momento, satisface $u_1 = \bar{u} - (\psi / \lambda)$, $u_2 = 0$, viene definida por las desigualdades:

$$(1-\lambda)\bar{u} \le \psi < \lambda\,\bar{u}, \qquad \lambda\left[\bar{u} - \alpha x\right] < \psi,$$

En esta región, donde la comunidad dominante no alcanza su objetivo instantáneo y la otra comunidad no consume, la variable de coestado permanece constante y como no puede alcanzar el valor nulo (gráfica 1), el reparto asociado, sólo puede formar parte de una trayectoria óptima al comienzo del horizonte temporal, si este tiene una determinada amplitud y el stock de agua, que evoluciona siguiendo la ecuación $\dot{x} = g - \bar{u} + (\psi / \lambda)$, es decreciente. Esta última condición, junto a las desigualdades que definen la región, determinan que los consumos asociados a ella sólo son posibles, si los parámetros del modelo satisfacen :

$$g < \frac{2\lambda - 1}{\lambda}\bar{u}, \qquad (3)$$

Supuesta la relación anterior, si en el momento inicial se considera el punto $(\alpha x_0, \psi_0)$ de A, el tiempo $t^A < T$ durante el que ambas comunidades pueden utilizar los consumos de la región, satisface la ecuación:

$$t^A = \frac{\lambda\,[\bar{u} - \alpha x_0] - \psi_0}{\alpha\,[\psi_0 + \lambda\,(g - \bar{u})]},$$

con $\psi_0 < \lambda\,[\bar{u} - g]$ y constante. Entonces, en el intervalo $\left[0, t^A\right)$ el stock de agua disminuye y la trayectoria que comenzó en $(\alpha x_0, \psi_0)$ alcanza en el momento t^A la región B del plano de fase, verificándose $\psi_0 = \lambda\left[\bar{u} - \alpha\, x(t^A)\right]$.

Como en la región A, en la región C, la variable de coestado es constante, sin embargo, al contrario de lo que ocurre en la región A, los repartos asociados a la región C pueden mantenerse en todo el horizonte temporal si la variable de coestado toma en el momento inicial el valor nulo. Los consumos asociados a esta región son $u_1 = \bar{u} - (\psi / \lambda)$ para la comunidad dominante y $u_2 = \bar{u} - (\psi / (1 - \lambda))$ para la otra comunidad, por tanto, $u_1 \geq u_2$ y la comunidad con menor poder obtiene a lo sumo la misma cuantía de agua instantáneamente que la comunidad dominante. Sólo si la variable de coestado es nula las dos comunidades alcanzarán en esta región, y sólo en ella, unos consumos de agua iguales a sus objetivos instantáneos.

La región C está definida por las relaciones:

$$\lambda\,(\bar{u} - \alpha\, x) < \psi < (1 - \lambda)\bar{u},$$

y para determinar la optimalidad de sus consumos se analizan dos casos dependiendo de si la variable de coestado es nula o no, en el momento inicial. Si una trayectoria comienza y termina en la región C, tendremos que seleccionar $\psi_0 = 0$ y además, el stock de agua, en el momento inicial, tiene que satisfacer la condición de pertenecer a la región: $\alpha\, x_0 > \bar{u}$. El stock de agua que varia, en este caso, siguiendo la ecuación $\dot{x} = g - 2\bar{u}$ puede crecer, permanecer constante o decrecer con el paso del tiempo. No decrece si se satisface $g \geq 2\bar{u}$ debido a que las aportaciones instantáneas al embalse superan o igualan a la suma de los objetivos de las dos comunidades y decrece, si la desigualdad anterior es la complementaria. Si el stock no decrece, la amplitud del horizonte no importa pudiéndose mantener la estrategia un tiempo suficientemente amplio; pero si el stock decrece, él podrá alcanzar a lo sumo la frontera de la región, esto es, la cuantía $\bar{u} / \alpha$ y la amplitud del horizonte temporal tiene que ser menor que:

$$\frac{x_0 - (\bar{u} / \alpha)}{2\bar{u} - g} \qquad (4)$$

Si se considera, en el momento inicial, el punto $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ de C con ψ_0 distinto de cero, una trayectoria que comience en él, para ser óptima, sólo puede mantenerse al inicio del horizonte temporal, si este tiene una amplitud adecuada y entonces, el stock de agua disminuye; por tanto, hay análogos requerimientos que si iniciamos una trayectoria en la región A. Las diferencias con respecto a la región A, provienen al considerar la ecuación diferencial que satisface el stock de agua y la diferente posición en el plano de fase de las dos regiones. En efecto, por un lado, el stock de agua en el momento inicial tiene que pertenecer a la región, luego tiene que satisfacer:

$$\alpha\, x_0 > \frac{2\lambda - 1}{\lambda}\,\bar{u}\,, \qquad (5)$$

condición que no es requerida en el análisis de la región A y además, la variable de coestado en el momento inicial debe ser seleccionada, de forma que verifique:

$$0 < \psi_0 < min\big[\lambda\,(1-\lambda)[2\bar{u} - g],\,(1-\lambda)\bar{u}\big]\,, \qquad (6)$$

relación que se obtiene al considerar los limites de la región C y que el stock de agua que satisface:

$$\dot{x} = g - 2\bar{u} + \frac{\psi}{\lambda\,(1-\lambda)}\,,$$

es decreciente. Notemos que la condición (6) exige $2\bar{u} > g$.

Supuestas las condiciones (5) y (6), una trayectoria que se inicia en $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ alcanzará en $t^C <$ T, determinado por la expresión:

$$t^C = \frac{\bar{u} - \frac{\psi_0}{\lambda}}{\alpha\left[g - 2\bar{u} + \frac{\psi_0}{\lambda\,(1-\lambda)}\right]}\,,$$

obtenida integrando la ecuación diferencial del stock de agua en este supuesto, la región D del plano de fase.

Las regiones B, D y E tienen una dinámica semejante ya que todas ellas se caracterizan por tener un estado de equilibrio que es un punto de silla. En las regiones B y E las variedades inestables asociadas al punto de silla no dependen del parámetro de ponderación λ, mientras en la región D esto no ocurre.

La región B, donde la distribución de agua para las comunidades es $u_1 = \alpha\, x, u_2 = 0$, con $0 \le \alpha\,\lambda\;\; x < \bar{u}\,(2\lambda - 1)$, corresponde a la región del plano (x, ψ) determinada por el conjunto de desigualdades:

$$(1-\lambda)\,\bar{u} \le \psi < \lambda\, u\;\;,\quad \psi \le \lambda\,(\bar{u} - \alpha\, x),$$

El sistema dinámico que caracteriza esta región viene determinado por las ecuaciones:

$$\dot{x} = g - \alpha\, x$$
$$\dot{\psi} = -\alpha\left[\lambda\,(\bar{u} - \alpha\, x) - \psi\right],$$

y admite, una solución, estado de equilibrio (x^B, ψ^B), que pertenece a la recta $\psi = \lambda\left[\bar{u} - \alpha\, x\right]$ de la frontera de la región y satisface las expresiones $\alpha\, x^B = g,\ \psi^B = \lambda\left[\bar{u} - g\right]$. El estado de equilibrio es un punto de silla, siendo sus variedades estable E^S e inestable E^U asociadas, las rectas: $\lambda\,\alpha\, x + 2\psi = \lambda\left[2\bar{u} - g\right]$, $\alpha\, x = g$, respectivamente.

Los consumos asociados a esta región no forman parte de trayectorias terminales porque en ella, la variable de coestado nunca es nula, y una trayectoria óptima que pase por la región B evolucionará hacia la región D del plano de fase. La trayectoria puede iniciarse en la región B o bien, ha podido comenzar en la región A. Si $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ es un punto donde se inicia una trayectoria óptima situado sobre la región B, y por tanto, sus coordenadas verifican el conjunto de desigualdades que delimita esta región, en un momento de tiempo, denotado por t^B, alcanzará la frontera de la región y por tanto, $\psi(t^B) = (1-\lambda)\bar{u}$. Integrando el sistema dinámico, el punto t^B, si existe, tiene que ser solución de la ecuación $g(z) = 0$ con

$$g(z) = \frac{1}{2}\lambda\left[\alpha\, x_0 - g\right] z^2 + \left[(1-\lambda)\,\bar{u} - \lambda\,(\bar{u} - g)\right] z + \lambda\,(\bar{u} - g) - \frac{1}{2}\lambda\,(\alpha x_0 - g) - \psi_0,$$

donde $z = e^{-\alpha t^B}$ y tiene que satisfacer la condición:

$$0 \le \left[\alpha\, x_0 - g\right] z + g \le \frac{2\lambda - 1}{\lambda}\bar{u}, \qquad (7)$$

que considera que el stock de agua en el momento t^B pertenece a la región B.

Para analizar la existencia de t^B, se estudia el comportamiento de la función $g(z)$, suponiendo en primer lugar $\alpha\, x_0 \neq g$. Operando, se obtiene $g(1) = (1-\lambda)\bar{u} - \psi_0 < 0$ y $g(0) = (1/2)(2\lambda\,\bar{u} - \lambda\, g - \lambda\,\alpha\, x_0 - 2\psi_0)$ positivo si $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ de B, está situado por debajo de la variedad estable y, no positivo, si está sobre o por encima de la misma variedad. En el primer caso la existencia de t^B está garantizada, y entonces, la relación entre los parámetros será $\lambda\, g \le 2(2\lambda - 1)\bar{u}$. En la segunda posibilidad necesitamos que la función $g(z)$ tenga un máximo positivo, que el valor de la función en él sea no negativo y que al menos una de las dos raíces de la ecuación $g(z) = 0$ verifique (7). Si las dos raíces lo satisfacen, entonces seleccionaremos el menor t^B. Estas condiciones exigen, entre otras, que los parámetros verifiquen la relación: $g\lambda \le 2(2\lambda - 1)\,\bar{u} < 2g\lambda$.

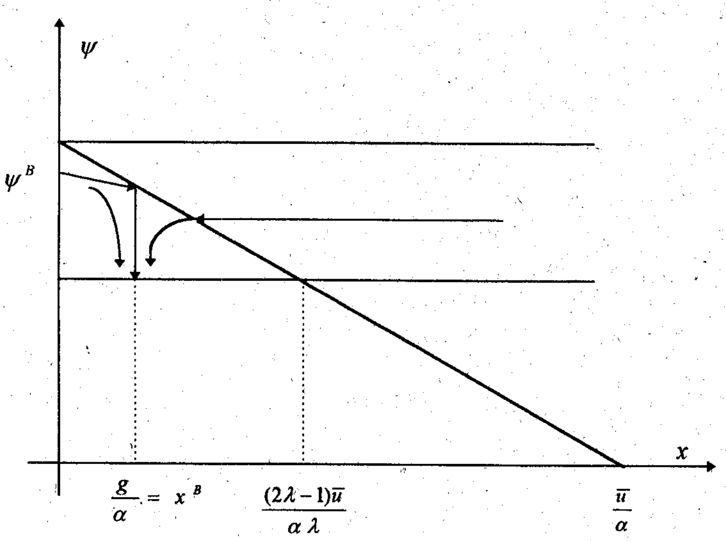
En particular, si $\alpha\, x_0 = g$ los parámetros tienen que satisfacer $g\lambda < (2\lambda - 1)\overline{u}$ (gráfica 2) y la trayectoria óptima será la variedad inestable del punto de silla, que alcanzará la frontera de la región E en el momento t^B determinado por la expresión:

$$e^{-\alpha t^B} = \frac{\psi_0 - \psi^B}{(1-2\lambda)\overline{u} + \lambda\, g},$$

Si la trayectoria óptima comienza en la región A, luego la relación (3) es cierta, ψ_0 tuvo que ser seleccionado menor que $\lambda\,(\overline{u} - g) = \psi^B$ luego, el punto $(\alpha\, x(t^A), \psi_0)$ se encuentra situado por debajo de la variedad estable de la región B y puede atravesarla. El tiempo que tarda la trayectoria en recorrer B hasta alcanzar la frontera, puede obtenerse resolviendo $g(z) = 0$ con $\psi_0 = \lambda\,(\overline{u} - \alpha\, x(t^A))$; denotando este tiempo por t^B, tenemos:

$$t^B = -\frac{1}{\alpha} Ln \frac{\psi^B - (1-\lambda)\overline{u} - \sqrt{(\psi^B - (1-\lambda)\overline{u})^2 - (\psi^B - \psi_0)^2}}{\psi^B - \psi_0},$$

La duración de la trayectoria será: $t^{AB} = t^A + t^B$ y para su optimalidad, se requiere $t^{AB} < T$.



Gráfica 2

Los consumos asociados a la región D son $u_1 = \alpha\, x$, $u_2 = \overline{u} - (\psi / (1-\lambda))$ con $0 < u_2 < \alpha\, x \le \overline{u}$. La región D es determinada por las relaciones:

$$(1-\lambda)[\overline{u} - \alpha\, x] < \psi \le \lambda[\overline{u} - \alpha\, x], \qquad 0 < \psi < (1-\lambda)\overline{u},$$

y sus consumos asociados determinan el sistema dinámico:

$$\dot{x} = g - \bar{u} + (\psi / (1-\lambda)) - \alpha\, x$$
$$\dot{\psi} = \alpha\, \psi - \alpha\, \lambda\, \bar{u} + \alpha^2 \lambda\, x\ ,$$

que admite a la solución $(\alpha\, x^D, \psi^D) = ((1-\lambda)g + (2\lambda - 1)\bar{u},\ \lambda(1-\lambda)(2\bar{u} - g))$ como estacionaria, punto de silla. Los subespacios estable E^S e inestable E^U asociados están determinados por las relaciones:

$$E^S \equiv \alpha\,(\sqrt{1-\lambda} - (1-\lambda))\,(x - x^D) + (\psi - \psi^D) = 0$$
$$E^U \equiv -\alpha\,(\sqrt{1-\lambda} + (1-\lambda))\,(x - x^D) + (\psi - \psi^D) = 0\ ,$$

dependientes, ambos, del parámetro de ponderación λ.

Los repartos asociados a esta región no son terminales, pero pueden formar parte de trayectorias óptimas que comiencen en la propia región D, o bien que comiencen en B aunque a su vez pudieron iniciarse en A o por último, pueden ser continuación de aquellas que se iniciaron en la región C.

Si $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ es un punto del plano de fase perteneciente a la región D y una trayectoria comienza en él, la evolución subsiguiente será hacia la región C o E, ya que la variable de coestado es decreciente. Si la trayectoria es óptima, en un momento de tiempo denotado por t^D alcanzará la recta $\psi = (1-\lambda)[\bar{u} - \alpha\, x]$ de la región E. Integrando el sistema dinámico el momento t^D tiene que ser solución de la ecuación $f(z) = 0$ con $z = Exp(\alpha\,\sqrt{1-\lambda} / (1-\lambda))t^D$ y

$$f(z) = \left[\frac{2\lambda - 1}{\lambda} + \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right] C_1 z^2 + (1-\lambda)(2\lambda - 1)(2\bar{u} - g)\, z + \left[\frac{2\lambda - 1}{\lambda} - \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}\right] C_2\ ,$$

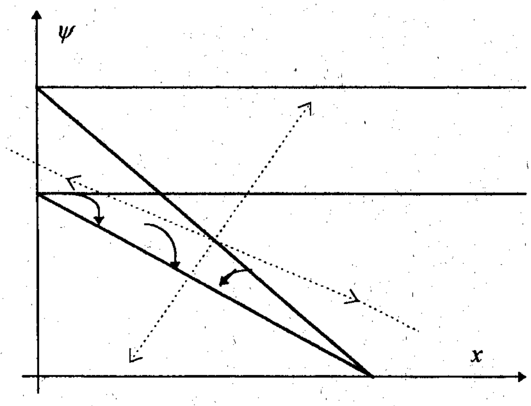
donde:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[(\psi_0 - \psi^D) + \frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}(\psi_0 - \lambda\,(\bar{u} - \alpha\, x_0)\right],$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[(\psi_0 - \psi^D) - \frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}(\psi_0 - \lambda\,(\bar{u} - \alpha\, x_0)\right].$$

Para encontrar un valor de z, mayor que uno, solución de $f(z) = 0$ se determina $f(1) = (\psi_0 / (1-\lambda)) + \alpha\, x_0 - \bar{u} > 0$. Ahora, el valor buscado existirá si $f(z)$ tiene un máximo tal que el valor de la función en él sea positivo o bien, si la función admite un mínimo mayor que la unidad y el valor de la función es no positivo. Para la primera condición es necesario, aunque no es suficiente que C_1 sea negativo y para la segunda condición y con las mismas características C_1 positivo.

La posición de la variedad estable, asociada a la solución estacionaria en el plano de fase, resulta esencial para determinar cuando un punto de la región D evoluciona hacia E. Si $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ de D está situado debajo de la variedad estable, su evolución será hacia E al estar la solución estacionaria formando parte de la recta $\psi = \lambda\left[\bar{u} - \alpha\, x\right]$, (gráfica 3).



Gráfica 3

No toda trayectoria que verifique $\psi_0 = (1-\lambda)\bar{u}$ puede evolucionar hacia D, depende de la pendiente de la variedad estable, función de λ y del valor de los parámetros g y $\bar{u}$ que influyen también, en el valor de la solución de equilibrio. Si $\psi_0 = \lambda\left[\bar{u} - \alpha\, x_0\right]$ o es alcanzada la región D desde C, entonces necesitaremos $\alpha\, x^D < \alpha\, x_0 < \bar{u}$ para garantizar la existencia de t^D.

Por último, en la región E, determinada por las inecuaciones:

$$0 \le \psi \le (1-\lambda)\bar{u}, \qquad 0 \le \alpha\, x \le \bar{u}, \qquad \psi \le (1-\lambda)\left[\bar{u} - \alpha\, x\right],$$

la distribución es positiva y proporcional al stock en cada momento. El estado de equilibrio $(\alpha\, x^E, \psi^E)$ asociado al sistema dinámico:

$$\dot{x} = g - 2\alpha\, x$$
$$\dot{\psi} = -\left[\bar{u} - \alpha\, x - 2\psi\right],$$

satisface las relaciones $\alpha\, x^E = g/2$, $2\psi^E = (\bar{u} - g/2)$ y por tanto, no pertenece a la región E. La solución estacionaria, es un punto de silla satisfaciendo su variedad inestable la ecuación $\alpha\, x = g/2$ y la variedad estable $\alpha\, x + 4\psi = 2\bar{u} - (g/2)$.

Una trayectoria óptima que pase por E puede provenir de la región D o puede haberse iniciado en ella misma, en todo caso será terminal. Si $(\alpha\, x_0, \psi_0)$, con $\alpha\, x_0 \neq g/2$, es un punto de la región E donde se inicia una trayectoria óptima, el tiempo t^E que tarda en alcanzar la variable de coestado el valor nulo, es una solución de la ecuación:

$$h(z) = (\alpha\, x_0 - g/2)z^2 - 2(\bar{u} - g/2)z + 2(\bar{u} - g/2) - (\alpha\, x_0 - g/2) - 4\psi_0 = 0,$$

donde $z = e^{-2\alpha t^E}$. Además en el momento z se tiene que satisfacer la relación $(g/2) - \bar{u} \leq ((g/2) - \alpha\, x_0)z \leq g/2$ para garantizar, que el stock de agua se mantiene en los límites de la región E. Analizando la función $h(z)$ se encuentra $h(1) = -4\psi_0 < 0$ y $h(0) = -\alpha\, x_0 - 4\psi_0 - 2\bar{u} + g/2$ positivo si el punto inicial está por debajo de la variedad estable de la solución estacionaria y no positivo, si esta por encima o sobre la misma variedad. En el primer caso, existe un valor de z que satisface todas las condiciones si $4\bar{u} > g$. En el caso de que el punto inicial, este seleccionado por encima o sobre la variedad estable, la existencia de z está condicionada a que la función $h(z)$ admita un máximo positivo y que en él, la función sea no negativa; estas condiciones exigen, entre otras, que se verifique $\alpha\, x_0 < \bar{u} < g$.

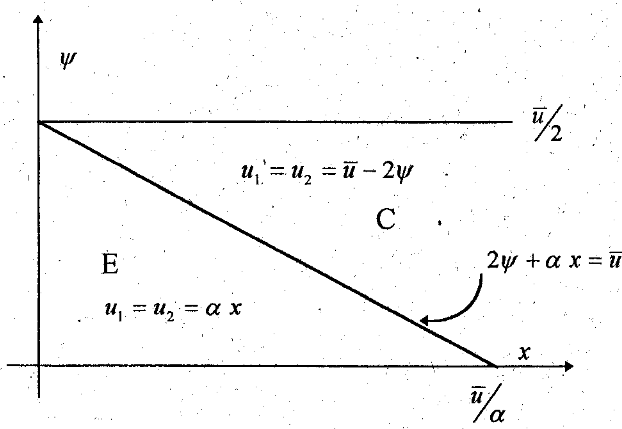
Si $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ es el punto donde se inicia una trayectoria óptima de E con $\alpha\, x_0 = g/2$, entonces $g < 2\bar{u}$ para poder mantener la trayectoria un tiempo no nulo y ella coincidirá con la variedad inestable del punto de equilibrio. El tiempo t^E que tarda la trayectoria en alcanzar la condición terminal, esto es la recta $\psi = 0$, viene determinado por la expresión:

$$1 - \frac{2\psi_0}{\bar{u} - (g/2)}.$$

La condición terminal no es satisfecha por todas las trayectorias que se inicien en la frontera de la región sobre la recta $\psi = (1-\lambda)[\bar{u} - \alpha\, x\,]$, depende de la posición del punto $(\alpha\, x_0, \psi_0)$ respecto a la variedad estable; en particular, si a la recta $\psi = (1-\lambda)[\bar{u} - \alpha\, x\,]$ se ha llegado desde la región E evolucionando desde C, luego $2\bar{u} > g$, entonces las componentes de la variable de coestado en las correspondientes situaciones de equilibrio satisfacen la relación $\psi^D < \psi^E$ y la estrategia es óptima si $t^C + t^D + t^E = T$, donde t^E puede obtenerse resolviendo la ecuación $h(z) = 0$ con la condición $\psi_0 = (1-\lambda)[\bar{u} - \alpha\, x_0]$.

4.- DISTRIBUCIÓN SIN PREFERENCIAS.

Esta sección analiza los consumos de las dos comunidades si el parámetro de ponderación λ de la expresión (2) es 1/2. La resolución del problema se simplifica con respecto al estudio de la sección anterior al obtener, resolviendo el problema, que los consumos de las dos comunidades tienen que ser iguales. Además, como en la sección anterior, no es óptimo que ambas comunidades no consuman. Entonces, sólo pueden considerarse las regiones C y E semejantes a las de la sección anterior (gráfica 4), teniendo como frontera común la recta $2\psi + \alpha x = \bar{u}$.



Gráfica 4

La región C, donde los consumos son $u_1 = u_2 = \bar{u} - 2\psi$ viene determinada por las desigualdades:

$$\bar{u} < 2\psi + \alpha x, \qquad 0 \le \psi < \bar{u}/2,$$

La variable de coestado, puede ser nula y en ese caso, una trayectoria óptima, con $\alpha x_0 > \bar{u}$, que comience en la región será terminal. La amplitud del horizonte temporal, no importa si $g \ge 2\bar{u}$ y el stock de agua no disminuye; si $g < 2\bar{u}$, la amplitud del horizonte no puede superar a la relación (4) por los mismos motivos que en la sección anterior fueron considerados. Si la variable de coestado es seleccionada en el momento inicial distinta de cero sobre la región C, la trayectoria óptima evolucionará hacia la región E, entonces $g < 2\bar{u}$, pues el stock de agua que satisface $\dot{x} = g - 2\bar{u} + 4\psi_0$, tiene que decrecer.

La región E, determinada por las relaciones $2\psi + \alpha x \le \bar{u}$, $0 \le \psi < \bar{u}/2$, $0 \le \alpha x < \bar{u}$, y donde los consumos son proporcionales al stock en cada momento, tiene asociado el sistema dinámico:

$$\dot{x} = g - 2\alpha x$$
$$\dot{\psi} = -\alpha[\bar{u} - \alpha x - 2\psi],$$

igual al de la región E del análisis anterior y admite por solución estacionaria a $(\alpha x^E, \psi^E) = (g/2, (\bar{u}/2) - (g/4))$ situado, ahora, sobre la frontera de la región. El estado de equilibrio, que es un punto de silla, tiene como variedad estable a la recta $(\alpha+2)(\alpha x - g/2) + 2\psi = \bar{u} - g/2$ e inestable la recta $\alpha x = g/2$. Si una trayectoria se inicia en $(\alpha x_0, \psi_0)$ de E, por debajo de la variedad estable del estado de equilibrio será terminal si $g/2 \leq \bar{u}$. Si la relación entre los parámetros es $g/2 > \bar{u}$, la trayectoria puede iniciarse en cualquier punto de la región, su tendencia hacia el equilibrio la llevará a alcanzar la recta $\psi = 0$.

4.- ANÁLISIS DE RESULTADOS.

La distribución de agua para regadío entre las dos comunidades concesionarias que se abastecen de un mismo embalse es función de la duración de los riegos, de las aportaciones netas al embalse, de los objetivos que se pretenden con la concesión por parte de ambas comunidades, de la cantidad de agua que tenga el embalse en el momento inicial y de la negociación entre las comunidades.

Suponiendo, en primer lugar, que la distribución no se realiza en igualdad, se han determinado diferentes trayectorias óptimas, que pueden ser englobadas según distintas relaciones entre g y $\bar{u}$.

Cuando la relación entre los parámetros es $g\lambda < (2\lambda - 1)\bar{u}$, la trayectoria óptima puede comenzar en cualquier región de las que han sido consideradas, alcanzándose siempre la región terminal E si la amplitud del horizonte de planificación supera a la relación (4). La elección de donde tiene que comenzar la trayectoria óptima depende de la amplitud del horizonte temporal y del valor del stock en el momento inicial. El stock de agua al final del horizonte temporal estará próximo a $g/2$, que coincide con el valor del stock de agua de equilibrio de la región E. Durante la temporada de riego, ninguna de las dos comunidades alcanzará un riego instantáneo que coincida con sus objetivos y si el comienzo de la trayectoria, se sitúa en la región A, la comunidad con menor poder irá incrementando con el paso por las diferentes regiones su consumo; sin embargo, la región con mayor poder, mantendrá un consumo proporcional al stock de agua salvo al inicio que será algo inferior. Pero si el horizonte temporal es inferior a la expresión (4) y el stock inicial puede situarse en la región C, ambas comunidades pueden mantener una distribución igual a sus objetivos instantáneos.

Si la relación entre los parámetros es $g\lambda = (2\lambda - 1)\bar{u}$, la región A ya no puede ser inicial y las regiones B y D tienen asociadas la misma solución de equilibrio con $\psi^B = \psi^D = (1-\lambda)\bar{u}$. Una trayectoria óptima puede comenzar en la región B debajo de la variedad estable, seguir o comenzar en D, donde toda la región está debajo de la variedad estable asociada a su situación estacionaria y atravesar o comenzar en la región E, en particular, puede evolucionar siguiendo la variedad inestable asociada, hasta alcanzar la condición terminal. Esta última región también puede alcanzarse desde la región C. Así, si el stock en el momento inicial satisface $\alpha x_0 > \bar{u}$ el inicio de la trayectoria óptima será la región C con $\psi_0 \neq 0$ si la amplitud del horizonte es suficiente, aunque también puede considerarse $\psi_0 = 0$ y de nuevo, la relación (4) tendrá que satisfacerse. Terminar en la región C, supone que el stock de agua al final del riego, es superior a si se tiene que terminar en la región E; la comparación será entre $\bar{u}$ y $g/2$. Salvo si la trayectoria comienza en la región C donde las dos comunidades obtendrán consumos iguales a los pretendidos, en el resto de los casos sus consumos serán menores. Comenzar en la región B, supone un consumo nulo durante el tiempo que se tarde en atravesarla para la comunidad no dominante.

Una trayectoria que comienza en B, dependiendo del valor del parámetro λ, no siempre puede atravesar la región D si la relación entre los parámetros es $(2\lambda-1)\bar{u} < \lambda g < 2\lambda\,\bar{u}$, por la posición que la variedad estable tiene en el plano de fase en esta última región. También, la posición de la misma variedad en la región E no permite que cualquier trayectoria que se inicie en D logre alcanzar el valor terminal. Sin embargo, existen trayectorias óptimas que comienzan en la región C con $\psi_0 \neq 0$ y alcanzan la condición terminal atravesando D y E. Puntos de la evolución de esas trayectorias pueden ser puntos de inicio en las regiones D y E. El stock de agua disponible al final del horizonte temporal, estará próximo a la situación de equilibrio del stock de la región E. Otra vez, la condición $\psi_0 = 0$ sobre la región C puede mantenerse con los mismos requerimientos.

Si $2g = \bar{u}$, tenemos $\alpha x^E = \bar{u}$ y la variedad estable asociada al estado de equilibrio de E, no permite que ninguna trayectoria que comience en un punto situada sobre o encima de ella alcance la condición final. Entonces, sólo hay dos trayectorias con diferente comportamiento cualitativo dependiendo del valor del stock de agua en el momento inicial. Si $\alpha x_0 < \bar{u}$, la trayectoria óptima seguirá una curva integral de la región E por debajo de su variedad estable y el valor del stock tenderá al de equilibrio de esa región. Si $\alpha x_0 \geq \bar{u}$, la trayectoria comenzará en E manteniéndose en la situación estacionaria o en C, con $\psi_0 = 0$. En ambos casos, el stock de agua siempre mantendrá el mismo valor durante el horizonte temporal cuya amplitud no importa y ambas comunidades, podrán mantener un consumo de agua igual a su objetivo instantáneo.

Por último, si $2g > \bar{u}$, la trayectoria óptima comienza en la región C o en la región A, dependiendo del valor del stock de agua en el momento inicial. Si es en C, el stock de agua crece con el paso del tiempo y los consumos de las comunidades son iguales a los objetivos propuestos. Si el inicio de la trayectoria es en la región A, por encima, sobre o debajo de la variedad estable de su estado de equilibrio, el stock de agua crece, pero al final del horizonte el stock de agua disponible será como mucho $\bar{u}$; los consumos serán proporcionales al stock de agua en cada momento para las dos comunidades, inferiores a sus objetivos.

Los resultados se simplifican si ambas comunidades se reparten el agua sin ningún poder de una sobre otra. Así, si la relación entre los parámetros es $g/2 > \bar{u}$, la trayectoria óptima puede mantener un reparto idéntico al objetivo instantáneo si $\alpha x_0 > \bar{u}$ y el horizonte T satisface la condición (4). Si alguna o las dos de las condiciones anteriores no se verifica, entonces, la trayectoria puede comenzar en la región C con consumos inferiores al objetivo propuesto para acabar en la región E, donde los repartos son proporcionales al stock en cada momento. La región E puede también ser seleccionada, en función de la amplitud del horizonte como inicio y fin de la trayectoria óptima. En particular, en este caso puede ser seleccionada la variedad inestable del punto de silla.

Si la relación entre los parámetros es $g/2=\bar{u}$, dependiendo de la posición del stock en el momento inicial, se puede seleccionar consumos idénticos a los objetivos o proporcionales al stock. En el primer caso, la trayectoria óptima comienza en un punto de la región C del que no se mueve y en el segundo caso, la trayectoria seguirá una curva integral situada por debajo de la variedad inestable.

El stock de agua en el momento inicial, es otra vez el responsable de la estrategia óptima a seguir si $g/2>\bar{u}$. No pudiéndose pasar de la región C a la E, una trayectoria óptima que empieza en una región terminará en ella. Si se comienza en C, el stock de agua crece con el paso del tiempo y aunque esto también ocurre, si se empieza en la región E en esta, la duración de la estrategia es limitada.

BIBLIOGRAFÍA.

ARGÜELLES, A. El Agua, Recurso Escaso en la Cuenca del Guadalquivir. Ponencia del I Congreso Regional del Agua. Valladolid. (1996). pág. 71.

KAITALA, V., HÄMÄLÄINEN, R. P. y RUUSUNEN, J. "On the Analysis of Equilibria and Bargaining in a Fishery Game" en Optimal Control Theory and Economic Analysis 2. (G. Feichtinger Ed.). North-Holland. Amsterdam. (1985). pág. 593-606.

LEY 29/1985, de 2 de Agosto, DE AGUAS. Legislación sobre Aguas. Civitas.(1993).

PETIT, M. L. Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis. Cambridge. Melbourne. (1990).

PLAN NACIONAL DE SANEAMIENTO Y DEPURACIÓN DE AGUAS RESIDUALES. B.O.E. 12-Mayo-1995.

SEIERSTAD, A. y SYDSAETER, K. Optimal Control Theory with Economic Applications. North-Holland. Amsterdam. (1993).

SOTO, D. ¿Tiempo Continuo o Discreto? Un Problema de Control Óptimo. Anales de Estudios Económicos y Empresariales. Vol. 11, (1996), (en prensa).