REDISTRIBUCIÓN DE RIQUEZA ANTE LAS DESIGUALDADES REGIONALES

María José MACARRO HEREDIA
Fctd. Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid

En un estado autonómico como España, es una cuestión importante el estudio del crecimiento económico de las comunidades que conforman la fisonomía española. Nosotros no pretendemos hacer un estudio exahustivo de los factores económicos regionales que inciden en la economía española, ni siquiera tendremos en consideración la totalidad de las comunidades autónomas. Supondremos que el producto nacional se genera por la aportación de capital correspondiente a solo dos regionesw o dos comunidades autónomas de características muy distintas en cuanto a diversas cuestiones como población, población activa, nivel de industralización... Estos hechos diferenciales deberían ser amortiguados al considerar la participación de ambas regiones en el producto total.

1.- INTRODUCCIÓN.

Considerando únicamente la aportación regional al producto total de una economía, planteamos en este trabajo un juego diferencial bipersonal de suma no nula entre dos regiones I y II, por el que ambas pretenden maximizar su consumo global.

La publicación en 1.973 del modelo de K. Lancaster sobre la *Ineficiencia del Capitalismo* constituye la primera referencia en la aplicación de los juegos diferenciales al problema del crecimiento económico. Muchos han sido los autores que han intentado contrastar la tesis de Lancaster trabajando bajo distinyas hipótesis: Pohjola, M. (1985), Gradus, R. (1988), Seierstad, A. (1992).... El modelo planteado en este trabajo concreta las modificaciones propuestas por Kaitala, V. y Pohjola, M. (1990) al modelo de Lancaster. Estas modificaciones se centran fundamentalmente en una cuestión: El hecho de admitir la existencia de una forma de redistribución de la renta, que en el citado trabajo controlan los trabajadores. En nuestro trabajo suponemos que la región II tiene capacidad para detraer (vía administración central) parte de la remuneración correspondiente a la región I a través de una variable de redistribución controlada por dicha comunidad. De esta manera, la retribución de la región I quedará disminuída en el valor de esta variable, mientras que la retribución de la región II quedará aumentada en dicho valor. Cada una de las regiones determina la inversión en función de su ratio de ahorro, pero ambas coinciden en su pretensión de obtener un valor máximo para sus consumos. De esta manera planteamos el juego diferencial en horizonte finito entre ambas comunidades autónomas que resolvemos en el contexto de una solución no cooperativa.

Dentro de este contexto, es determinante para la resolución del mismo la información que poseen los jugadores. ¿Qué es lo que éstos conocen en cada instante?. La estructura de información puede ser de varios tipos, pero en este trabajo nosotros supondremos que el jugador en cada instante recuerda únicamente el estado inicial, es decir, la información está estructurada en ciclo abierto.

Cuando planteamos para nuestro juego la búsqueda de la solución de Nash, asumimos dos hipótesis fundamentales: cada uno de los jugadores conoce la estructura del modelo que describe la situación conflictiva y el funcional objetivo del otro jugador, es decir, la información es simétrica entre los dos jugadores. La simetría de la información hace posible que los jugadores tomen sus decisiones simultáneamente.

2.- EL MODELO

Consideraremos un modelo bisectorial para una economía nacional. El producto total es la suma de los productos Y_1 e Y_2 de las regiones I y II respectivamente, $Y_1 = \mu K_1$, $Y_2 = \eta K_2$ donde K_1 y K_2 son los stocks de capital en cada una de las regiones y μ, η constantes positivas.

Para cada región una porción de la renta se ahorra, de manera que si llamamos s_1, s_2 a los ratios de ahorro correspondientes a cada uno de las regiones, el ahorro total de la economía podría expresarse como $s_1Y_1 + s_2Y_2$. No obstante supondremos que existe la posibilidad de transferir porciones de renta de una región a otra canalizadas a través de una variable $x(t)$. Si suponemos que el sector cuya productividad marginal es más grande, es el que está obligado a hacer la cesión, y consideramos que es por ejemplo la región I, obtenemos determinadas acotaciones para la variable $x(t) : 0 \leq x(t) \leq \beta\mu K_1$, $0 < \beta < 1$.

Cada una de las regiones puede fijar el valor de su ratio de ahorro a lo largo de un horizonte temporal finito $[0,T]$ pero el sector más deprimido, en este caso la región II, tiene además la capacidad para establecer el valor de la redistribución $x(t)$.

Bajo los supuestos establecidos, el consumo instantáneo de las regiones I y II puede expresarse de la siguiente forma:

$$C_1(t) = [1 - s_1(t)]\,[\mu K_1(t) - x(t)]$$

para la región I y

$$C_2(t) = [1 - s_2(t)]\,[\eta K_2(t) + x(t)]$$

para la región II.

Las funciones $C_1(t)$ y $C_2(t)$ cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial C_i(t)}{\partial K_i} > 0\ ,\quad \frac{\partial C_i(t)}{\partial \dot{K}_i} > 0\ ,\quad i = 1,2.$$

siendo la variación instantánea del stock de capital para las regiones I y II respectivamente,

$$\dot{K}_1(t) = s_1(t)\,[\mu K_1(t) - x(t)]\,, \quad K_1(0) = K_1^0 > 0$$

$$\dot{K}_2(t) = s_2(t)\,[\eta K_2(t) + x(t)]\,, \quad K_2(0) = K_2^0 > 0$$

En la planificación del período $[0,T]$ el objetivo de cada una de los sectores considerados es la elección de cursos temporales para las variables de control $s_1(t)$, $s_2(t)$, $x(t)$ que proporcionen un consumo máximo durante todo el horizonte temporal. Los problemas planteados entonces pueden formularse en los siguientes términos:

$$\underset{0\leq\, s_1(t)\leq 1}{\text{máx}} \int_0^T C_1(t)dt$$

$$\text{s.a.}\quad \dot{K}_1(t) = s_1(t)\,[\mu K_1(t) - x(t)]\,, \quad K_1(0) = K_1^0 > 0$$

$$\dot{K}_2(t) = s_2(t)\,[\eta K_2(t) + x(t)]\,, \quad K_2(0) = K_2^0 > 0$$

para la región I, y

$$\underset{\substack{0\leq\, s_2(t)\leq 1\\ 0\leq\, x(t)\leq\, \beta\mu K_1(t)}}{\text{máx}} \int_0^T C_2(t)dt$$

$$\text{s.a.}\quad \dot{K}_1(t) = s_1(t)\,[\mu K_1(t) - x(t)]\,, \quad K_1(0) = K_1^0 > 0$$

$$\dot{K}_2(t) = s_2(t)\,[\eta K_2(t) + x(t)]\,, \quad K_2(0) = K_2^0 > 0$$

para la región II.

En adelante, con el fin de simplificar la notación, prescindiremos de explicitar la dependencia de las variables con respecto al tiempo.

3.- ESTRATEGIAS DE NASH EN CICLO ABIERTO.

Planteado el modelo como un juego diferencial bipersonal, pretendemos obtener la solución del mismo dentro de un contexto no cooperativo. Determinaremos las estrategias para ambos jugadores con una estructura de información en ciclo abierto, es decir, considerando únicamente la dependencia de dichas estrategias con respecto al tiempo, dado el estado inicial. Bajo estas hipótesis, ambos jugadores resolverán simultáneamente sus problemas dando respuesta óptima a la estrategia escogida por el otro jugador.

Si denotamos simplemente por I y II a las regiones I y II respectivamente, el hamiltoniano y la lagrangiana correspondiente al jugador I puede expresarse como:

$$H_1(K_1,K_2,\varphi_1,\psi_1,s_1) = (1 - s_1)(\mu K_1 - x) + \varphi_1 s_1(\mu K_1 - x) + \psi_1 s_2(\eta K_2 + x)$$

$$L_1(K_1,K_2,\varphi_1,\psi_1,s_1,a_1,a_2) = H_1(K_1,K_2,\varphi_1,\psi_1,s_1) + a_1(1 - s_1) + a_2 s_1$$

Mediante las condiciones necesarias del Principio del Máximo obtenemos que los valores admisibles para la variable de control s_1 del jugador I y las condiciones que garantizan su existencia pueden ser expresadas única y exclusivamente en función de la variable de coestado asociada a la evolución dinámica de K_1 de la siguiente forma:

$$s_1 = \begin{cases} 0 & si \quad \varphi_1 \leq 1 \\ (0,1) & si \quad \varphi_1 = 1 \\ 1 & si \quad \varphi_1 \geq 1 \end{cases}$$

Las variables de coestado φ_1, ψ_1 satisfacen las correspondientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\varphi}_1 = -\mu\,[1 - s_1 + \varphi_1 s_1] \ , \ \varphi_1(T) = 0$$

$$\dot{\psi}_1 = -\eta s_2 \psi_1 \ , \ \psi_1(T) = 0$$

pero el comportamiento de la variable ψ_1 como veremos resulta irrelevante para la obtención y el desarrollo de las estrategias óptimas.

Para el jugador II, de acuerdo con el problema planteado, las funciones H_{II} y L_{II} tienen la siguiente expresión:

$$H_{II}(K_1,K_2,\varphi_2,\psi_2,s_2,x) = (1 - s_2)(\eta K_2 + x) + \varphi_2 s_1(\mu K_1 - x) + \psi_2 s_2(\eta K_2 + x)$$

$$L_{II}(K_1,K_2,\varphi_2,\psi_2,s_2,b_1,b_2,c_1,c_2) = H_{II}(K_1,K_2,\varphi_2,\psi_2,s_2,x) + b_1(1 - s_2) + b_2 s_2 + c_1(\beta\mu K_1 - x) + c_2 x$$

En este caso la variable de control s_2 tomará los siguientes valores:

$$s_2 = \begin{cases} 0 & si \quad \psi_2 \leq 1 \\ (0,1) & si \quad \psi_2 = 1 \\ 1 & si \quad \psi_2 \geq 1 \end{cases}$$

y el valor de la redistribución dependerá de las tasa de ahorro utilizadas en función de las siguientes condiciones:

$$x = \begin{cases} 0 & si \quad 1 - s_2(1-\psi_2) - \varphi_2 s_1 \leq 0 \\ (0, \beta\mu K_1) & si \quad 1 - s_2(1-\psi_2) - \varphi_2 s_1 = 0 \\ \beta\mu K_1 & si \quad 1 - s_2(1-\psi_2) - \varphi_2 s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Las variables de coestado asociadas a las restricciones del capital para este problema deben cumplir las ecuaciones:

$$\dot{\varphi}_2 = -\mu[(1-\beta)\,\varphi_2 s_1 + \beta(1 - s_2 + s_2\psi_2)] \ , \ \varphi_2(T) = 0$$

$$\dot{\psi}_2 = -\eta(1 - s_2 + \psi_2 s_2) \ , \ \psi_2(T) = 0$$

Para los ratios de ahorro s_1, s_2 solo pueden darse los valores cero o uno en todo el horizonte temporal ya que para cualquier otro valor de s_i o s_2 debe cumplirse $\varphi_1=1$ o $\psi_2=1$ sin embargo en ninguno de estos casos la ecuación diferencial correspondiente a la variable de coestado es nula, siendo $\dot{\varphi}_1 = -\mu \neq 0$ cuando $s_1 \in (0,1)$ o $\dot{\psi}_2 = -\eta \neq 0$ para $s_2 \in (0,1)$. La variable de redistribución podrá tomar cualquier valor cuando los jugadores utilizan los máximos valores permitidos para la tasa de ahorro. En los demás casos, es la decisión de consumir o ahorrar del primer jugador la que condiciona el valor de la redistribución de la siguiente forma: Si éste solo consume, x tomará el valor más alto $x = \beta\mu K_1$ al margen de la política de consumo o inversión adoptada por el jugador II, pero si las decisiones sobre la inversión son opuestas para ambos jugadores y $s_1 = 1$ la variable x puede tomar los valores 0 o $\beta\mu K_1$.

Las condiciones exigidas a las variables de coestado en el momento terminal son $\varphi_1(T) = \psi_1(T) = \varphi_2(T) = \psi_2(T) = 0$; por lo tanto, de acuerdo con las condiciones establecidas, la única política terminal será $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $x = \beta\mu K_1$, que se mantendrá durante un intervalo $(t_1, T]$.

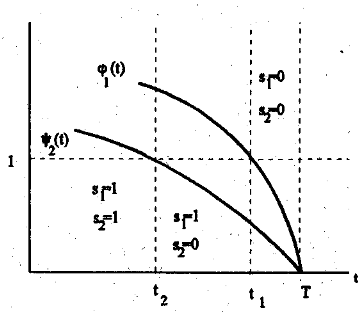

Gráfico 1

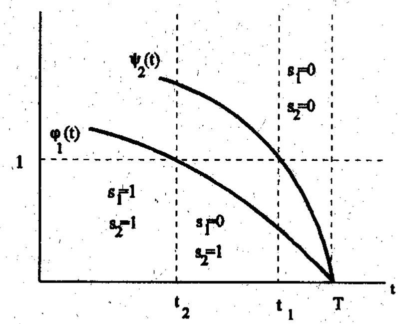

Gráfico 2

En el instante t_1 los jugadores solamente podrán modificar su ratio de ahorro pasando de $s_1 = 0$ a $s_1 = 1$ o de $s_2 = 0$ a $s_2 = 1$ en función de la relación que exista entre los valores de $\varphi_1(t_1)$ y $\psi_2(t_1)$. Así, si $\varphi_1(t_1) > \psi_2(t_1)$ será el jugador I el que modifique el valor de su control, permaneciendo s_2 en $s_2 = 0$. Si la relación entre $\varphi_1(t_1)$ y $\psi_2(t_1)$ es la opuesta, el jugador II pasará en t_1 a utilizar $s_2 = 1$. (Gráficos 1 y 2). Por último si los valores de $\varphi_1(t_1)$ y $\psi_2(t_1)$ coinciden, ambos jugadores cambiarán de política respecto a la inversión en el instante t_1.

Durante el intervalo final $(t_1, T]$ los jugadores utilizan para sus controles los valores $s_1=0$ $s_2=0$, $x=\beta\mu K_1$, por lo tanto las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las variables de coestado φ_1 y ψ_2 son $\dot{\varphi}_1 = -\mu$ y $\dot{\psi}_2 = -\eta$. Resolviendo estas ecuaciones con la condición terminal $\varphi_1(T) = \psi_2(T) = 0$ obtenemos:

$$\varphi_1(t_1) = \mu(T - t_1)$$

$$\psi_2(t_1) = \eta(T - t_1)$$

Evidentemente, bajo la hipótesis $\mu > \eta$, solo puede darse la situación descrita en el Gráfico 1.

Es el jugador I el que modifica el valor de su variable de control en el momento t_1, pasando de $s_1=0$ a $s_1=1$, política que se mantiene desde el instante inicial.

La condición $\varphi_1(t_1)=1$ nos permite establecer la expresión del momento t_1:

$$t_1 = T - \frac{1}{\mu}$$

Los capitales K_1 y K_2 durante este intervalo permanecen constantes en el valor alcanzado en el instante t_1, $K_1(t)=K_1(t_1)$, $K_2(t)=K_2(t_1)$ $\forall t\in(t_1,T]$ y representa la máxima cuantía de capital para las regiones I y II.

El jugador II, que utiliza durante el intervalo $(t_2,t_1]$ los valores $s_2=0$, $x=\beta\mu K_1$ para sus controles, modificará uno u otro o ambos simultáneamente dependiendo del comportamiento de las variables de coestado φ_2, ψ_2 en este intervalo.

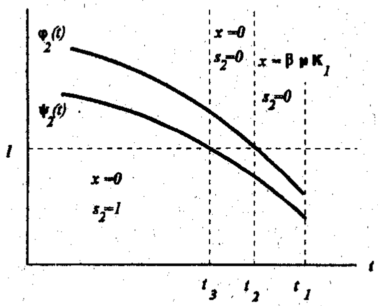

Gráfico 3

En el período $(t_2,t_1]$ las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las variables φ_2 y ψ_2 son las siguientes:

$$\dot{\varphi}_2 = -\mu[(1-\beta)\varphi_2 + \beta]$$

$$\dot{\psi}_2 = -\eta$$

siendo $\varphi_2(t_1)=\beta$ y $\psi_2(t_1)=\eta(T-t_1)$. Si en el instante t_2 el jugador II modifica su política de redistribución pasando de $x=0$ a $x=\beta\mu K_1$ siendo $\varphi_2(t_2)>\psi_2(t_2)$, las variables φ_2 y ψ_2 evolucionarán según el Gráfico 3. En este caso, desde $\varphi_2(t_2)=1$ e intrgrando la correspondiente ecuación diferencial desde t_2 hasta t_1, podemos expresar el momento t_2:

$$t_2 = T - \frac{1}{\mu}\{1 - \ln[\beta(2-\beta)]\}$$

pero $\psi_2(t_2)=\eta(T-t_2)<1$, es decir $\frac{\eta}{\mu}\{1-\ln[\beta(2-\beta)]\}<1$.

Si suponemos que esta condición se cumple, podemos establecer la existencia de otro período $(t_3, t_2]$ en el que el jugador II utiliza las políticas $s_2 = 0$, $x = 0$ y será precisamente en t_3 donde este jugador cambia de $s_2 = 0$ a $s_2 = 1$. La amplitud de este intervalo puede determinarse integrando la ecuación $\dot{\psi}_2 = -\eta$ desde t_3 hasta t_2 con las condiciones $\psi_2(t_3)=1$, $\psi_2(t_2)=\eta(T-t_2)$:

$$t_2 - t_3 = 2\{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\mu}[1 - \ln\beta(2-\beta)]\}$$

Por lo tanto la estratgia óptima cuando los parámetros del modelo verifican la relación $\mu > \eta[1 - \ln\beta(2-\beta)]$ se ajusta al siguiente esquema:

0	t_3	t_2	t_1	T
$s_1=1\ s_2=1\ x=0$	$s_1=1\ s_2=0\ x=0$	$s_1=1\ s_2=0\ x=\beta\mu K_1$	$s_1=0\ s_2=0\ x=\beta\mu K_1$	

siendo $t_1 = T - \frac{1}{\mu}$; $t_2 = T - \frac{1}{\mu}\{1 - \ln[\beta(2-\beta)]\}$; $t_3 = T - \frac{2}{\eta} + \frac{1}{\mu}[1 - \ln\beta(2-\beta)]$.

La evolución del capital de acuerdo con esta estrategia tiene lugar de la siguiente forma:

$$K_1(t) = K_1^0\, e^{\mu t} \quad \forall t \in [0, t_2]$$

$$K_1(t) = K_1^0\, e^{\mu(1-\beta)t + \mu\beta t_2} \quad \forall t \in (t_2, t_1]$$

$$K_1(t) = K_1(t_1) \quad \forall t \in (t_1, T]$$

para la región I y

$$K_2(t) = K_2^0\, e^{\eta t} \quad \forall t \in [0, t_3]$$

$$K_2(t) = K_2(t_3) \quad \forall t \in (t_3, T]$$

para la región II.

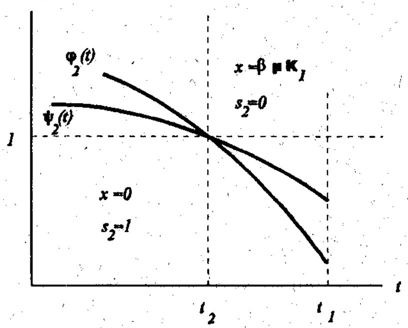

Gráfico 4

Si suponemos que el jugador II en el momento t_2 modifica los valores de sus dos variables de control, pasando de $s_2 = 0$ $x = \beta\mu K_1$ a $s_2 = 1$ $x = 0$, se debe verificar la relación $\varphi_2(t_2) = \psi_2(t_2) = 1$. En este caso las condiciones de admisibilidad de los controles requieren que el comportamiento de las variables de coestado se ajuste al representado en el Gráfico 4 . La condición $\varphi_2(t_2) = \psi_2(t_2)$ supone que los parámetros verifiquen la siguiente relación:

$$\mu = \eta[1 - \ln\beta(2-\beta)]$$

El horizonte temporal queda dividido en tres subintervalos, confundiéndose los momentos de cambio t_2 y t_3. El desarrollo de la estrategia óptima es el siguiente:

0	$t_2 = t_3$	t_1	T
$s_1=1$ $s_2=1$ $x=0$	$s_1=1$ $s_2=0$ $x=\beta\mu K_1$	$s_1=0$ $s_2=0$ $x=\beta\mu K_1$	

siendo $t_1 = T - \dfrac{1}{\mu}$; $t_2 = T - \dfrac{1}{\eta}$.

El capital crece para la región I durante el primer subintervalo, siendo $K_1(t) = K_1^0\ e^{\mu t}$ $\forall t \in [0, t_2]$ y permanece constante en el valor alcanzado en t_2 hasta la conclusión del periodo de planificación. Para la región II, el crecimiento del capital se prolonga hasta el instante t_1 siendo $K_2(t) = K_2^0\ e^{\eta t}$ $\forall t \in [0, t_1]$ y a partir de entonces permanece constante.

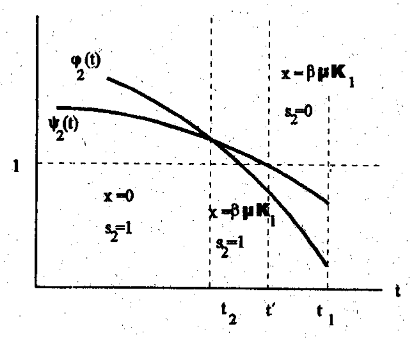

Gráfico 5

Por último, si suponemos que $\psi_2(t) > 1$, por las condiciones establecidas para la admisibilidad de los controles, llegamos a que debe existir un instante $t' \in (t_2, t_1)$ en el que $\psi_2(t') = 1$ y $\varphi_2(t') < \psi_2(t')$ como requieren dichas condiciones. En este caso el valor de ψ_2 en el momento t' nos indica el cambio de política para la variable s_2 y la relación $\varphi_2(t_2) = \psi_2(t_2)$ el paso de $x = \beta\mu K_1$ a $x = 0$. Las variables de coestado se comportan según lo establecido en el Gráfico 5 y la planificación del horizonte temporal, que estaría dividido en cuatro subintervalos, se haría de acuerdo con la siguiente estrategia:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & t_2 & & t' & & t_1 & & T \\
\bullet & \text{——} & \bullet & \text{——} & \bullet & \text{——} & \bullet & \text{——} & \bullet \\
& s_1=1\ s_2=1\ x=0 & & s_1=1\ s_2=1\ x=\beta\mu K_1 & & s_1=1\ s_2=0\ x=\beta\mu K_1 & & s_1=0\ s_2=0\ x=\beta\mu K_1 &
\end{array}
$$

Integrando las ecuaciones $\dot{\psi}_2 = -\eta$, $\dot{\varphi}_2 = -\mu[(1-\beta)\varphi_2 + \beta]$ en $(t', t_1]$ con las condiciones $\psi_2(t_1)=\eta(T-t_1)$, $\psi_2(t')=1$ y $\varphi_2(t_1) = \beta$, obtenemos la expresión de t' y el valor de $\varphi_2(t')$:

$$t' = T - \frac{1}{\eta}$$

$$\varphi_2(t') = \frac{\beta}{1-\beta}\{(2-\beta)e^{\mu(1-\beta)(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\mu})} - 1\}$$

Para determinar t_2 debemos resolver la ecuación diferencial $\dot{\varphi}_2 = -\mu[(1-\beta)\varphi_2 + \beta\psi_2]$ siendo $\psi_2(t) = e^{\eta(t'-t)}$ conocidos los valores de $\varphi_2(t')$ y $\varphi_2(t_2)$. La solución de esta ecuación y por tanto la expresión del momento de cambio t_2 dependen de la relación que exista entre los valores de $\mu(1-\beta)$ y η , de manera que si $\mu(1-\beta) = \eta$:

$$t_2 = T - \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta\beta} + \frac{2-\beta}{\eta}e^{\eta(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\mu})}$$

En otro caso, podemos despejar el valor de t_2 de la siguiente expresión:

$$T - t_2 = \frac{1}{\mu(1-\beta)-\eta}\ln\frac{\beta}{(1-\beta)}\{(2-\beta)[\mu(1-\beta)-\eta]e^{\beta} + \eta e^{-\frac{1}{\eta}[\mu(1-\beta)-\eta]}\}$$

Cuando los jugadores siguen esta estrategia óptima, los capitales evolucionan de forma similar a la descrita en las soluciones anteriores:

$$K_1(t) = K_1^0\, e^{\mu t} \quad \forall t \in [0,t_2]$$

$$K_1(t) = K_1^0\, e^{\mu(1-\beta)t+\mu\beta t_2} \quad \forall t \in (t_2, t_1]$$

$$K_1(t) = K_1(t_1) \quad \forall t \in (t_1, T]$$

para la región I y

$$K_2(t) = K_2^0\, e^{\eta t} \quad \forall t \in [0,t_2]$$

$$K_2(t) = \begin{cases} K_2(t_2)e^{\eta(t-t_2)} + \dfrac{\beta\mu}{\mu(1-\beta)-\eta}K_1(t_2)[e^{\mu(1-\beta)(t-t_2)} - e^{\eta(t-t_2)}] & si\ \ \mu(1-\beta)\neq\eta \\ e^{\eta(t-t_2)}\,[K_2(t_2) + \beta\mu K_1(t_2)(t-t_2)] & si\ \ \mu(1-\beta)=\eta \end{cases}$$

$\forall t \in (t_2, t']$

$K_2(t) = K_2(t') \quad \forall t \in (t', T]$

para la región II.

Ambos capitales crecen en un primer periodo para luego permanecer constantes a partir de un determinado instante que en esta caso es t_1 para K_1 y t' para K_2.

4.- CONCLUSIONES

Obtenidas las estrategias de equilibrio de Nash del juego diferencial planteado, podemos observar la fuerte dependencia que tienen las decisiones de los jugadores respecto a los valores de los parámetros del modelo. La condición impuesta a las constantes μ y η, $\mu > \eta$ determina completamente la actuación del primer jugador.Éste, que únicamente puede planificar su política de inversión en el horizonte temporal fijado $[0, T]$, para cualquiera de los casos estudiados establece un período inicial en el que utiliza la máxima tasa de ahorro permitida, y a partir de un instante t_1 únicamente consume hasta la conclusión del período de planificación.

El segundo jugador, que controla además de su ratio de ahorro, la política de redistribución, establece las políticas a seguir para cualquiera de sus variables de control únicamente durante el período en que el primer jugador invierte toda su renta. La actuación de este jugador está siempre sujeta al cumplimiento de determinadas condiciones para los parámetros del modelo.

En este sentido, se obtienen tres estructuras diferentes para la estrategia de equilibrio. En el primer caso, la decisión de consumir toda su renta, trás un periodo inicial en el que se utiliza el valor máximo para el ratio de ahorro, no modifica la política de prescindir de la redistribución que se ha seguido desde el comienzo del hiorizonte temporal. Posteriormente, el jugador II considera el valor máximo de la redistribución y mantiene estos valores para sus controles hasta el final del período. La segunda estructura obtenida para la estrategia de equilibrio supone la existencia de un único momento de cambio en el que el segundo jugador modifica simultáneamente los valores de sus controles. Éstos, en un período inicial responden a la decisión de prescindir de la redistribución e invertir toda la renta y en el segundo período se adopta una política contraria, exigiendo el valor más alto de la redistribución y dedicando toda la renta al consumo. En el último caso, el cambio de política respecto a la redistribución, pasando de $x=0$ a $x=\beta\mu K_1$, es anterior a que se modifique la política de inversión, de $s_2=1$ a $s_2=0$.

En cualquiera de los tres casos expuestos, cuando el jugador I decide consumir exclusivamente, el jugador II ya viene manteniendo esta política desde alguno de los momentos de cambio anteriores. Lo mismo sucede con la variable de redistribución, el valor $x=\beta\mu K_1$ es adoptado por el jugador II antes de que el jugador I modifique su política sobre la inversión.

La evolución de los capitales K_1 y K_2 es similar en todas las estrategias obtenidas: Un primer período en que hay un crecimiento más fuerte, coincidiendo con las políticas iniciales de ambos jugadores $s_1=1$, $s_2=1$, $x=0$. A continuación un período de crecimiento más suave debido a la decisión del jugador II de consumir o de considerar un valor no nulo para la redistribución. El crecimiento de los capitales será aún más débil durante el periodo en que ambas políticas se utilicen a la vez. Por último, un periodo en el que los capitales permanecen constantes. En cualquiera de los casos, tanto la descripción de los periodos de crecimiento como los instantes de tiempo en que las tendencias descritas se desarrollan, quedan establecidos en función de los parámetros del modelo.

BIBLIOGRAFÍA

Başar, T. y Olsder, G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, London.

Bjarne, S.J. (1994) :*The Dynamic Systems of Basic Economic Growth Models*. Kluwer Academic Publishers.

Gradus, R. (1988): "The Reaction of the Firm on Governmental Policy: A Game Theoretical Approach". *Optimal Control Theory and Economic Analysis*. Vol. 3, pág,s. 265-290.

Kaitala, V. y Pohjola, M. (1990): "Economic Development and Agreeable Redistribution in Capitalism: Efficient Game Equilibria in a two-class Neoclassical Growth Model". *International Economic Review*. Vol. 31, nº 2, pág,s. 421-438.

Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization:The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* North Holland, New York.

Lancaster, K. (1973): "The Dynamic Inefficiency of Capitalism". *Journal of Political Economy.* Vol. 81, pág,s. 1092-1109.

Petit, M. L. (1990): *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis.* Cambridge University Press, New York.

Pohjola, M. (1985): "Growth, Distribution and Employment Modelled as a Differential Game". *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2.* (G. Feichtinger Ed.) North-Holland, Amsterdam, pág,s. 265-290.

Seierstad, A. (1993): "The Dynamic Inefficiency of Capitalism". *Journal of Economic Dynamics and Control.* Vol. 17, pág,s. 877-886.

Seierstad, A.and Sydsaeter, K. (1993) *Optimal control Theory with Economic Applications.* North- Holland, New York.