

## LA DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA EN CASTILLA Y LEÓN

Jesús ESTEBAN GARCÍA

Catedrático de Economía Aplicada. Universidad de Valencia

J. Miguel BACHERO NEBOT

Concepción ROJO OLIVAS

Félix RUIZ PONCE

Profesores TEU de Economía Aplicada. Universidad de Valencia.

### 1.- INTRODUCCIÓN.

El artículo formula los modelos de distribución teórica de la renta para las distintas provincias de la Comunidad Autónoma de Castilla y León desde la vertiente de los ingresos. La información utilizada será la proporcionada por las Encuestas de Presupuestos Familiares de 1980/81 y 1990/91.

La posibilidad de disponer información de dos encuestas permitirá analizar si los cambios ocurridos en la distribución, en relación con la igualdad, han sido o no significativos. Asimismo podrá observarse el nivel de convergencia de las diferentes provincias que componen el territorio autónomo a lo largo del decenio 1980-1990, así como su evolución en relación con la experimentada por España.

Dos criterios compiten entre sí a la hora de formular un modelo adecuado para la distribución de la renta: una adecuada bondad del modelo, generalmente especificada a través de un contraste de bondad de ajuste, y una fácil interpretación de los parámetros implicados en él.

Usualmente el índice de Gini se calcula asumiendo que cada uno de los individuos del mismo intervalo recibe la misma renta. Esta hipótesis introduce generalmente más igualdad de la real. Gastwirth (1972) formuló las cotas del índice de Gini estimado a partir de datos agrupados procedentes de una muestra de datos de renta. De hecho, demostró que el índice de Gini de la población debería encontrarse entre ambas cotas, constituyendo, por ello una condición necesaria de bondad de ajuste del modelo.

El modelo Gamma aplicado por Amoroso (1925) fue utilizado posteriormente por Salem y Mount (1974) ajustando el modelo a datos de renta en Estados Unidos para los años 1960 a 1969; sin embargo no se verificaba el test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, por lo que

recientemente<sup>1</sup> se ha propuesto una alternativa para superar esa deficiencia, en base a la cual se realiza el presente estudio.

Primeramente se expone las principales características del modelo Gamma, la estimación de sus parámetros así como la alternativa que se propone para verificar las condiciones de Gastwirth así como obtener un estadístico de Kolmogorov-Smirnov aceptable. La tercera sección se dedica a la aplicación empírica a Castilla y León, utilizando los resultados para observar los desequilibrios territoriales en cuanto a desigualdad de ingresos, así como la evolución de la desigualdad en el periodo.

## 2.- EL MODELO GAMMA: ALGUNAS PROPIEDADES Y ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS.

La densidad del modelo Gamma se define como:

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad 0 < \alpha < \infty$$

donde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$$

La media, moda, varianza, asimetría, y mediana se relacionan con los parámetros del modelo de la siguiente forma:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad M_0(X) = \frac{\alpha - 1}{\lambda}, \quad \sigma^2(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad g_3(X) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad M_c(X) = \frac{3\alpha - 1}{3\lambda}$$

Los estimadores máximos verosímiles de los parámetros del modelo pueden obtenerse, a partir de una muestra aleatoria extraída de una población de ingresos anuales por hogar, por derivación de la función logaritmo de la verosimilitud:

<sup>1</sup>Bachero, J.M., Esteban, J., Rojo, C., Ruiz, F. "Evolution of income inequality in Spain, period 1981-1991". Seminar on the Measurement and Analysis of Social Exclusion. Commission of the European Communities and UK Department of Social Security. Bath. June. 1994.

$$L(\bar{x}; \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i} = \frac{\lambda^{n\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = n \left( \ln \lambda - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right) + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = n \frac{\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

La resolución del sistema anterior conducirá a los estimadores de  $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$ , que serán:

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{x}}$$

$$\ln \hat{\alpha} - \frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} = \ln \left( \frac{\bar{x}}{\hat{\lambda}} \right)$$

Dado que  $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$  son estimadores máximoverosimiles, serán óptimos asintóticamente normales, esto es:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} \approx N \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{n(t\alpha - 1)} & \frac{\lambda}{n(t\alpha - 1)} \\ \frac{\lambda}{n(t\alpha - 1)} & \frac{t\lambda^2}{n(t\alpha - 1)} \end{pmatrix} \right]$$

con

$$t = \frac{d^2}{d\alpha^2} \ln \Gamma(\alpha)$$

Una estimación del vector de medias y de la matriz de varianzas-covarianzas podrá obtenerse mediante la sustitución de  $\alpha, \lambda$  por  $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$ .

En consecuencia, solo con el conocimiento de  $\bar{x}, \bar{x}$ , esto es, las medias aritmética y geométrica muestrales, es posible estimar los parámetros del modelo Gamma; sin embargo, la no linealidad del sistema obliga a la resolución del mismo por métodos numéricos. Adicionalmente resulta necesaria una estimación de  $\bar{x}$ , dado que la información disponible se presenta usualmente a nivel de decilas. Es por ello que las propiedades de los estimadores serán aproximadas.

Salem y Mount (1974) utilizaron para la estimación de la media geométrica la marca de clase del intervalo y alternativamente el valor medio del intervalo. La estimación realizada con la media de los intervalos permitían cumplir las cotas de Gastwirth; sin embargo, no se verificaba la bondad de ajuste contrastada con el test de Kolmogorov-Smirnov (Camilo Dagum 1991). Es por ello que se propone una forma alternativa de estimación consistente en:

$$\bar{x} = \left( \prod_{i=1}^I c_i \right)^{\frac{n_i}{N}}$$

con

$$c_i = x_{li} + k(\bar{x}_i - x_{li}) \quad 0 \leq k \leq 1$$

sujeto a

$$L \leq IG \leq U$$

$I$  = número de grupos en los datos agrupados (decilas)

$n_i$  = número de familias en el grupo "i"

$N$  = tamaño de la muestra

$x_{li}$  = límite inferior de la renta del grupo "i"

$x_{mi}$  = renta media del grupo "i"

$IG$  = índice de Gini

$L, U$  = cotas inferior y superior de Gastwirth

Desde una perspectiva económica el parámetro  $\alpha$  puede asociarse con la desigualdad<sup>2</sup>, y  $\lambda$  con la ley de Gibrat.

### 3.- APLICACIÓN DEL MODELO A CASTILLA Y LEÓN.

Con el método propuesto se han estimado los parámetros del modelo  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ , para las provincias de Castilla y León en los años 1980 y 1990, presentándose los resultados en el cuadro 1.

<sup>2</sup>R<sup>2</sup> entre el índice de Gini y  $\alpha$  es 0,94 y 0,97 para España, en 1980-81 y 1990-91, respectivamente.

Todos los modelos estimados verifican las cotas de Gastwirth, asimismo dan un buen ajuste, salvo Segovia en 1980 y España en los dos años.

CUADRO 1

Provincia	1981				1991			
	Cota Inferior	Ind.Gini	Cota Superior	$\alpha$	Cota Inferior	Ind.Gini	Cota Superior	$\alpha$
ÁVILA	0,36716	0,3704682	0,373204	2,037787	0,3193962	0,322266	0,3251065	2,779169
BURGOS	0,3303225	0,3311437	0,3367206	2,618391	0,3296274	0,333147	0,3376076	2,583875
LEÓN	0,3386675	0,3418157	0,3451686	2,441383	0,3018256	0,3045462	0,3081181	3,143251
PALENCIA	0,3289146	0,3308466	0,3352742	2,623561	0,2981263	0,3009861	0,3033412	3,224276
SALMNCA	0,3448685	0,3473368	0,3516353	2,356083	0,3450879	0,3482019	0,3521722	2,343079
SEGOVIA	0,3386519	0,3442516	0,3456075	2,403255	0,3119121	0,3148936	0,3176372	2,92318
SORIA	0,3517972	0,3553306	0,358425	2,239378	0,3171281	0,3200667	0,323113	2,821093
VALLELDID	0,2817069	0,286665	0,2876105	3,581219	0,3208166	0,3241753	0,327381	2,743473
ZAMORA	0,3492363	0,3576072	0,357104	2,207513	0,3268889	0,3300058	0,3339479	2,638275
ESPAÑA	0,3352494	0,3362176	0,3420447	2,532145	0,3233654	0,3266262	0,3298925	2,698564

Letras en negrilla para nivel de significación del 1%. Negrilla e Itálicas, no significativo. Resto significativo al 5%.

Dos preguntas surgen de forma inmediata, una ligada al nivel de desequilibrio interterritorial, esto es: ¿los diferentes valores de  $\alpha$  permiten afirmar que los niveles de desigualdad son diferentes entre las provincias en el mismo año?. La otra relacionada con la evolución de la desigualdad en el mismo territorio: ¿han cambiado de forma significativa los niveles de desigualdad en cada provincia?. Ambas preguntas se reducen a, desde el punto de vista estadístico, contrastar la igualdad de parámetros  $\alpha$ . En efecto, sea la hipótesis nula:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_j = \dots = \alpha_j = \alpha^*$$

la razón de verosimilitud será

$$\eta = \frac{\max_{\alpha_i, \lambda_i} L(\bar{x}; \bar{\alpha}, \bar{\lambda})}{\max_{\alpha_i^*, \lambda_i^*} L(\bar{x}; \alpha_1^*, \dots, \alpha_i^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_i^*)}$$

donde  $\alpha_i, \lambda_i$ , y  $\alpha_i^*, \lambda_i^*$ , corresponden a la solución del sistema bajo la hipótesis alternativa y nula respectivamente. Operando se llega a:

$$\ln \eta = \sum_{j=1}^I n_j \left[ (\hat{\alpha}^* \ln \hat{\alpha}^* - \hat{\alpha}_j \ln \hat{\alpha}_j) - (\ln \Gamma(\hat{\alpha}^*) - \ln \Gamma(\hat{\alpha}_j)) - (\hat{\alpha}^* - \hat{\alpha}_j) \left( \ln \left( \frac{\bar{x}_j}{\hat{\alpha}_j} \right) - 1 \right) \right]$$

estadístico que se distribuye como

$$-2 \ln \eta \approx \chi^2_{(J-1)}$$

La aplicación de éste contraste para Castilla y León en los años 1980 y 1990 nos llevan a la construcción de las siguientes matrices en las que se exponen los valores del estadístico  $-2 \log \eta$  entre cada dos provincias. De su observación se desprende que, en 1980, los niveles de desigualdad eran semejantes entre Burgos y Palencia, entre León, Salamanca y Segovia, así como entre Zamora y Soria.

1980	ÁVILA	BURGOS	LEÓN	PALENCIA	SALAMNCA	SEGOVIA	SORIA	VALLADLID
BURGOS								
LEÓN								
PALENCIA			0,02					
SALAMNCA				3,54				
SEGOVIA			0,75		1,13			
SORIA								
VALLADLID								
ZAMORA							0,57	
1990	ÁVILA	BURGOS	LEÓN	PALENCIA	SALAMNCA	SEGOVIA	SORIA	VALLADLID
BURGOS								
LEÓN								
PALENCIA			1,79					
SALAMNCA								
SEGOVIA	5,37							
SORIA	0,45					2,57		
VALLADLID	0,37						1,62	
ZAMORA	5,46	0,88						3,27

Valores críticos: 6,63 (1%) y 3,84 (5%)

Esta situación es diferente en 1990. En efecto, Ávila, Segovia, Soria, Valladolid y Zamora constituyen un grupo de provincias, junto a otro constituido por León y Palencia. Finalmente Burgos se encontraría próximo a Zamora.

Estos cambios de posicionamiento han sido realizados como consecuencia de una evolución diferenciada tanto en los niveles de desigualdad como de ingreso medio. Así en el cuadro 2 se expone la diferente evolución de las distintas provincias.

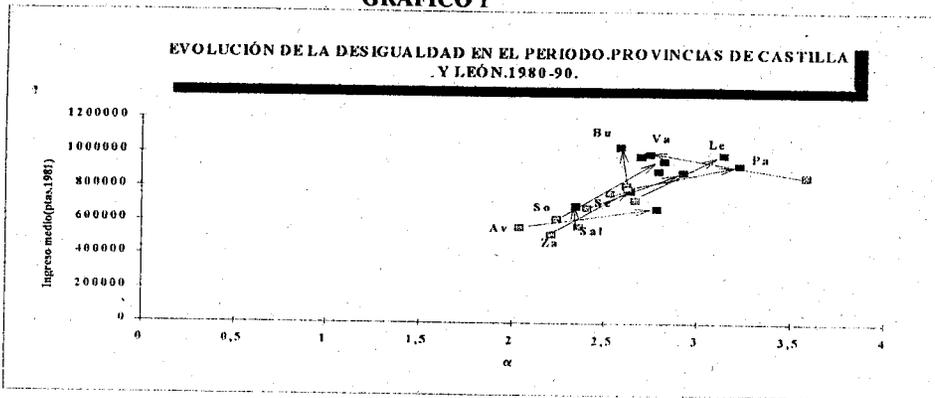
**CUADRO 2**  
**EVOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD**  
 Tasa de variación en el periodo(%)  
 α Ingreso me-  
 dio

VALLDLID	-23,39	15,76 Decrecimiento significativo de la igualdad
BURGOS	-1,32	27,73 Cambios
SALAMNCA	-0,55	22,29 no significativos
LEÓN	17,85	36,72 Crecimiento significativo
ZAMORA	19,51	50,00 de la igualdad
SEGOVIA	21,63	30,41
PALENCIA	22,90	17,34
SORIA	25,98	56,74
ÁVILA	36,38	19,14

La representación del ingreso medio frente a los niveles de desigualdad (gráfico 1) permite observar como la situación claramente dominante de Valladolid ha sido ocupada por Palencia y León. De igual forma la situación de "dominadas" de Ávila y Zamora ha pasado a ser ocupada por Salamanca, que si bien no ha cambiado su nivel de desigualdad, éste ha sido superado por el de aquellas.

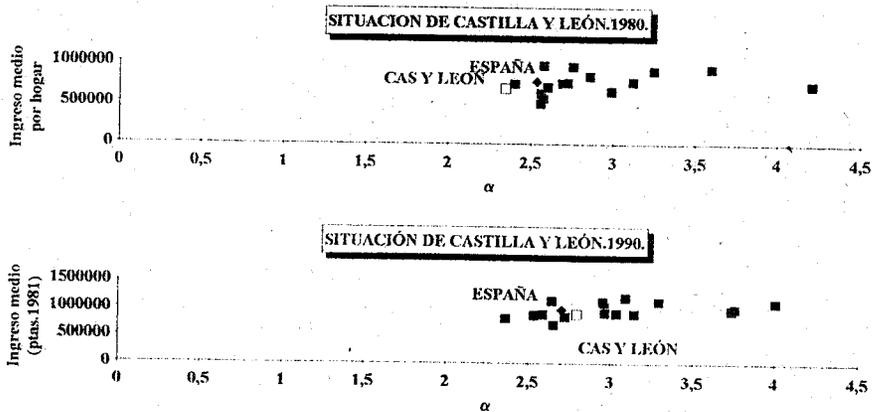
De los resultados anteriores se desprende que las diferentes provincias de Castilla y León han evolucionado en el periodo 1980-1990 hacia una mayor igualdad, a excepción hecha de Valladolid, y que tal evolución se ha realizado disminuyendo las diferencias provinciales existentes dentro de la Comunidad Autónoma, consiguiendo con ello un territorio más homogéneo, en términos de desigualdad de lo que lo era en 1980. Algo semejante sucede con el nivel de ingresos medios en pesetas constantes, donde se observa como el menor aumento de los niveles de ingresos de provincias como Valladolid o Palencia, acompañado del más alto crecimiento de Soria y Zamora han contribuido positivamente a una convergencia del territorio en términos de ingresos.

GRÁFICO 1



Este aumento generalizado de la igualdad explica la mejora experimentada por Castilla y León en el contexto del Estado. Así en el gráfico 2 puede observarse como Castilla y León se encontraba en la zona de más alta desigualdad, si se comparaba con el resto de Comunidades Autónomas en 1980, y pasa en 1990 a ocupar posiciones más intermedias tanto en términos de desigualdad como de nivel de ingresos medios.

GRÁFICO 2

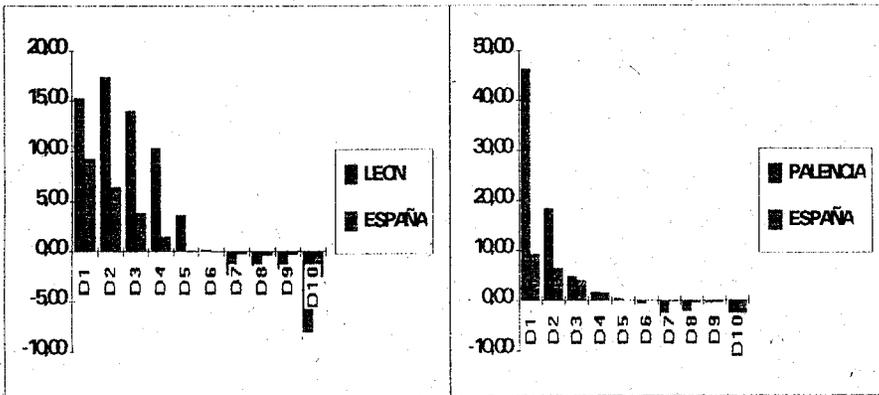


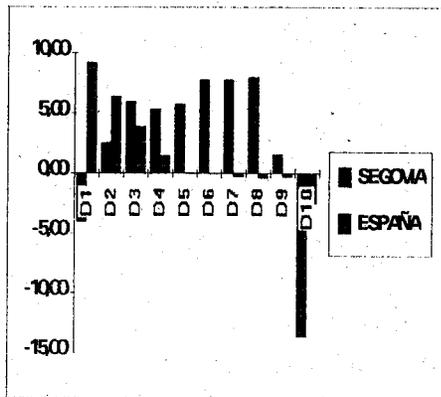
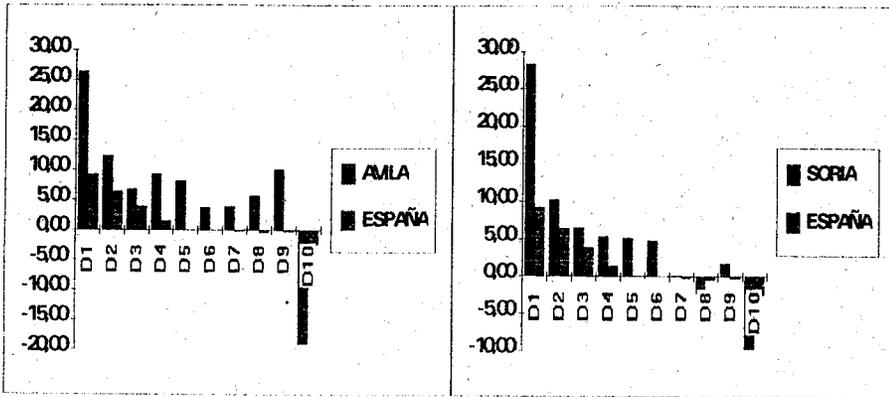
Por último, y dentro de los límites establecidos para la presentación de los trabajos a este Congreso, no deseáramos dejar de poner de manifiesto que la forma en la que se ha conseguido estos mayores niveles de igualdad en la distribución de los ingresos, así como la disminución de las diferencias territoriales han obedecido a modelos diferentes que convendrá analizar en estudios posteriores y en los que no cabrá olvidar la no neutralidad del espacio frente a las medidas económicas.

Un análisis de la tasa de variación de la participación de las diferentes decilas en el ingreso total de la provincia nos confirma la existencia de modelos de distribución diferentes durante el periodo analizado. León y Palencia presentan un decrecimiento de la participación de sus decilas altas en beneficio de una mayor participación de sus decilas más bajas - mayor crecimiento a más bajas decilas.

Ávila concentra el decrecimiento en su decila más alta, y el crecimiento se da en forma desigual creciendo más hacia las decilas extremas. Soria prima las decilas más bajas pero con cargo a la décima y octava, también se beneficia la novena.

Segovia es una modificación del modelo anterior pero con una variante de importancia desde el punto de vista social, nos referimos a la pérdida en la participación de los ingresos totales de la provincia de las clases más desfavorecidas, hecho que no se da en ninguna otra provincia de Castilla y León.



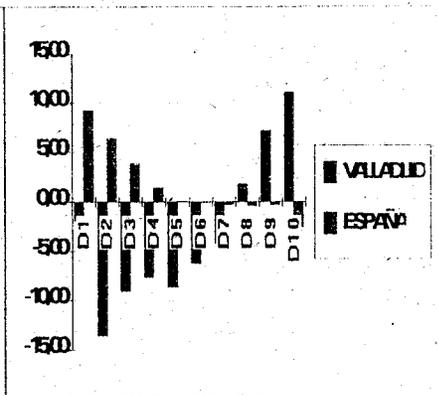
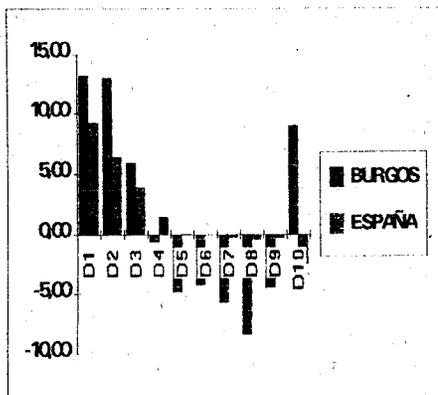
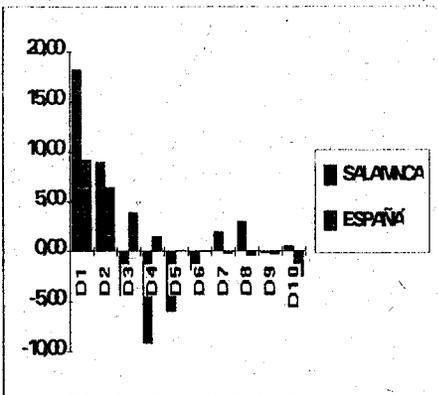
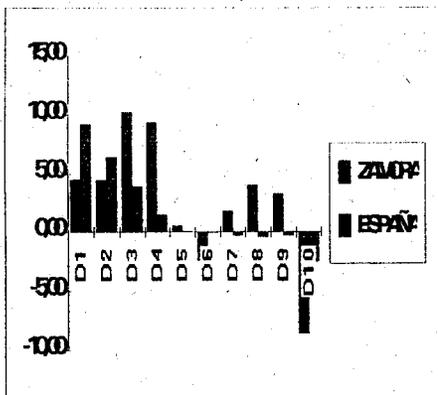


Zamora comienza a presentar decilas intermedias que pierden participación, aspecto más patente en Salamanca.

Burgos no sólo pierde participación en sus decilas intermedias sino que alimenta el aumento de la participación de su decila más alta.

Por último Valladolid presenta un claro enriquecimiento del 30% de los hogares más favorecidos a partir del 70% menos favorecido.

No cabe duda de que se trata de modelos diferentes y cuya explicación sobrepasa los límites de un trabajo como el presente. En cualquier caso sería peligroso aventurar una explicación global para estas diferencias de comportamiento, es más, lo prudente será pensar en la existencia de causas diferentes que han actuado con desigual intensidad en cada provincia. En ellas se encuentran involucrados los movimientos de población, su estructura por edades y relación con la actividad, la evolución de las inversiones, infraestructuras, estrategias empresariales, orientación de la producción, productividad en los diferentes sectores,... y un largo etcétera que sobrepasa los límites de este trabajo.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

**Bachero, J.M., Esteban, J., Rojo, C., Ruiz, F.** (1994).- "Evolution of income inequality in Spain, period 1981-1991". Seminar on the Measurement and Analysis of Social Exclusion. Commission of the European Communities and UK Department of Social Security. Bath. June.

**Dagum, C.**, (1991).- *Renta y Distribución de la riqueza, desigualdad y pobreza: Teoría, modelos, y aplicaciones*. Cuaderno 22. Seminario de Estadística. Euskadi.

**Gastwirth, J.L.** (1972).- "The Estimation of the Lorenz Curve and the Gini Index". *The Review of Economics and Statistics*. p.306-316.

----- **and Krieger, A.M.**, (1974).- "On Bounding Moments from Grouped Data". *Journal of the American Statistical Association*. p.468-471.

----- **and J.T. Smith**, (1972).- "A New Goodness-of-Fit Test". *Proceedings of the American Statistical Association*.

**Gibrat R.**, (1931).- "Les inegalites economiques". Sirey. Paris.

**Instituto Nacional de Estadística**, (1982).- *Encuesta sobre presupuestos familiares 1980-81*. INE. Madrid.

(1994).- *Encuesta sobre presupuestos familiares 1990-91*. INE. Madrid.

**Kakwani, N.C.**, (1980).- *Methods Inequality and Poverty*. Oxford University Press. New York.

**Salem, A.B. and T.D. Mount**, (1974).- "A Convenient Descriptive Model of Income Distribution: The Gamma Density". *Econometrica*. p.1115-1127.