

UN INDICADOR SINTETICO

PARA EL REPARTO DE FONDOS DE COMPENSACION

M<sup>a</sup> del Pilar Zarzosa Espina

Facultad de CC.EE. y EE. de Valladolid.

## INTRODUCCION.-

La Distancia  $P_2$  ( $DP_2$ ) es un indicador sintético del bienestar, elaborado por el profesor PENA TRAPERO (1), construido, como su nombre indica, para medir distancias, disparidades. Tiene aplicación tanto a las comparaciones interespaciales, como a las intertemporales del nivel de bienestar. En lo que sigue, supondremos, por simplificar, que nos referimos al primer caso, es decir, la  $DP_2$  se aplica a medir las disparidades en el bienestar entre provincias, regiones, genéricamente "países", (2).

---

(1) PENA TRAPERO, J. B.: "Problemas de la Medición del Bienestar y Conceptos Afines. (Una aplicación al Caso Español)". I.N.E. Madrid, 1.977, págs. 114-127.

(2) Obsérvese que la denominación "países" se utiliza genéricamente, --- pues, mientras que las comparaciones sobre el nivel de bienestar de regiones o provincias de un mismo país, en general, tienen perfecto sentido, -- las comparaciones entre distintos países hay que tomarlas con mucha reserva, ya que es difícil aceptar que, en relación con el nivel de bienestar, varios países sean comparables.

**DEFINICION.-**

Sean:  $n$ , el número de componentes.

$m$ , el número de países.

$x_{ji}$ , el valor que, en el país  $j$ , presenta el componente del bienestar  $i$ .

$\forall i$ , la desviación típica del componente  $i$ .

$R_{i.i-1, i-2, \dots, 1}^2$ , el Coeficiente de Determinación en la regresión de  $X_i$  (vector de estados del componente  $i$  en los  $m$  países) - sobre  $X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1$

El indicador se construye bajo ciertas hipótesis, entre las que podemos destacar las siguientes:

- Completitud: El número de los componentes es tal que todas las propiedades relacionadas con el objetivo buscado por el indicador global están representadas a través de los componentes.

- Linealidad: La relación existente entre los distintos componentes es lineal.

Es decir:

$$X_i = d_0 + d_1 X_1 + \dots + d_{i-1} X_{i-1} + \epsilon_{i-1}, \text{ para } i=2, \dots, n$$

Con estos supuestos, se define la Distancia  $P_2$  de la forma:

$$DP_2 = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\forall_i} (1 - R_{i.i-1, i-2, \dots, 1}^2), \text{ con } R_{11}^2 = 0$$

donde:  $d_i = d_i(r, k) = |x_{ri} - x_{ki}|$ , si el indicador sintético se aplica a la comparación de los países  $r$  y  $k$ ; y

$d_i = d_i(r, *) = |x_{ri} - x_{*i}|$ , si se está midiendo la situación en el país  $r$  con respecto a una base de referencia,  $X_*$ .

El factor  $\frac{d_i}{\nabla_i}$  es el indicador parcial del componente  $i$ . Al dividir la distancia,  $d_i$  para el componente  $i$ , entre los dos países (o entre un país y la base de referencia, en su caso) por la desviación típica, se consigue expresar el indicador en unidades abstractas y, a la vez, se pondera  $d_i$  por la inversa de  $\nabla_i$ , de forma que la contribución de  $d_i$  al indicador sintético es inversamente proporcional a  $\nabla_i$ . Es decir, por un lado se soluciona el problema de la heterogeneidad de las unidades de medida de los indicadores parciales; y por otro, se utiliza un sistema de ponderación, mediante el que se consigue dar menor importancia a las distancias correspondientes a los componentes cuyos valores presenten mayor dispersión respecto a la media.

El factor  $(1 - R_{i.i-1, i-2, \dots}^2)$  evita la duplicidad de información, es decir, elimina de los indicadores parciales la información ya contenida en otros indicadores precedentes.

## JERARQUIZACION DE LOS COMPONENTES.-

El resultado de la  $DP_2$  varía si se altera el orden de entrada de los componentes en el indicador sintético. Por lo tanto, es preciso fijar un método de jerarquización de los componentes.

El criterio más lógico de ordenación es atender a la cantidad de información, sobre el objetivo a medir, que cada componente aporta al indicador sintético. Dado que el objetivo a medir se valora mediante la  $DP_2$ , se puede admitir que un componente es más importante, es decir, contiene mayor cantidad de información, que otro, si el grado de correlación existente entre el primero y la  $DP_2$  es mayor que el existente entre el segundo y la  $DP_2$ . La jerarquización de los componentes se haría, entonces, ordenándolos de mayor a menor, según el valor absoluto del coeficiente de correlación simple entre cada componente y la  $DP_2$ .

Sin embargo, obviamente, este método no es aplicable, puesto -- que requiere el conocimiento de los valores de  $DP_2$  ( $DP-2_1, DP-2_2, \dots DP-2_j, \dots DP-2_m$ ) y para calcular  $DP_2$  es necesario realizar previamente la jerarquización de los componentes. De ahí que el profesor Pena Trapero proponga, para aproximar el resultado, un método iterativo que parte de una solución inicial determinada. La solución inicial propuesta es la "Distancia de --- FRECHET", que es el máximo valor que puede tomar la Distancia  $P_2$  y que se define como la suma de todos los indicadores parciales:

$$F = \sum_i \frac{d_i}{\sqrt{d_i}}$$

El procedimiento propuesto para lograr la jerarquización de los componentes es el siguiente:

a) Obtención de la matriz,  $X$ , de los valores de los componentes en los  $m$  países. Los valores de los componentes que influyen negativamente en el nivel de bienestar deben tener signo negativo, a fin de que los aumentos (o disminuciones) de los valores de cualquier componente se correspondan con mejoras (o empeoramientos), por lo que a dicho componente se refiere, del nivel de bienestar.

b) Elección de la base de referencia, que representa la situación "ideal", el objetivo deseable. Más adelante veremos que la única condición que debe cumplir la base de referencia es ser, para cada componente, mayor o igual, o menor o igual, que los valores máximos o mínimos respectivamente de la sucesión de valores observados de tal componente.

c) Cálculo de la Distancia de Frechet para cada país:  $F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_m$

d) Ordenación de los componentes, de mayor a menor, según los valores absolutos de los coeficientes de correlación simple entre cada componente y la distancia de Frechet.

e) Obtención de la  $DP_2$  para cada país, haciendo entrar los componentes según el orden obtenido en d). A esta  $DP_2$  obtenida se la designa por  $DP_2^{(1)}$ .

f) Nueva ordenación de los componentes según la correlación existente entre cada uno de ellos y la  $DP_2^{(2)}$ .

g) Cálculo de la  $Dp_2$  para cada país, teniendo en cuenta la jerarquización obtenida en f). Se obtiene así  $DP_2^{(2)}$ .

h) Continúa la iteración hasta que la  $DP_2$  se estabiliza.

## PROPIEDADES DE LA $DP_2$

Por estar basada en el concepto de distancia, la  $DP_2$  satisface las condiciones exigidas a la distancia en un espacio métrico: No Negatividad, Comutatividad y Desigualdad Triangular. Pero además, verifica una serie de propiedades que la convierten en un buen indicador sintético. Estas propiedades, de las cuales omitimos las demostraciones por falta de espacio son las siguientes:

I. Existencia y Determinación: El indicador  $DP_2$  existe y toma un valor determinado, en cualquier situación. La única condición para el cumplimiento de esta propiedad es que la desviación típica de cada componente no se anule y sea finita, condición que no plantea problemas puesto que en la práctica se verifica.

II. Monotonía: La  $DP_2$  responde positivamente a una modificación positiva de los componentes y negativamente a una modificación negativa. La condición para que se cumpla esta propiedad es que si se altera un estado de un componente, la desviación típica de dicho componente y los coeficientes de determinación no se modifiquen. En la práctica, si el tamaño de la muestra,  $m$ , es grande, y la variación que se produce no es exagerada, la desviación típica y los  $R^2$  no sufren una modificación significativa.

III. Unicidad: Para una situación dada, el indicador sintético toma un único valor.

IV. Invariancia: La  $DP_2$  es invariante a cambios de origen y/o escala en las unidades en que vienen expresados los estados de los componentes.

V. Homogeneidad: La  $DP_2$  es una función homogénea de grado uno respecto a los indicadores simples.

VI. Transitividad: Si a, b y c son tres situaciones distintas del objetivo medible por el indicador sintético, se verifica:

$$\left. \begin{array}{l} DP_2(a) > DP_2(b) \\ DP_2(b) > DP_2(c) \end{array} \right\} \Rightarrow DP_2(a) > DP_2(c)$$

VII. Exhaustividad: La  $DP_2$  aprovecha al máximo y de forma útil la información suministrada por los indicadores parciales. Se entiende por "información útil" aquélla que no es falsa ni duplicada. La Distancia  $P_2$  verifica la propiedad de exhaustividad, puesto que cumple las condiciones siguientes:

1ª) De Independencia: Si todos los indicadores parciales son mutuamente independientes, el indicador sintético es la suma de todos ellos ( la Distancia de Frechet ).

2ª) De Dependencia Funcional: Si la información que recogen uno o varios indicadores parciales está incluida en la que recoge otro, aquéllos son eliminados, puesto que no aportan información útil. En el caso extremo de que exista un componente tal que todos los demás están --



perfectamente ligados a él por una relación lineal, la  $DP_2$  es el indicador parcial de dicho componente.

3ª) De Dependencia Parcial: Si algunos indicadores simples con tienen información parcial de otros, la  $DP_2$  elimina la doble información. El factor  $(1-R^2)$  va eliminando, como ya se ha dicho, de cada indicador -- simple, la parte de información recogida por los indicadores simples pre-cedentes.

4ª) De Partición: Si los componentes se pueden dividir en gru-pos ortogonales entre sí, entonces la  $DP_2$  es igual a la suma de las  $DP_2$  - de cada grupo.

VIII. Aditividad: El valor de la  $DP_2$  definida para la compara-ción entre dos países, r y k, es, al menos, la diferencia, en valor abso- luto, entre los valores de las  $DP_2$  de los dos países calculadas con res- pecto a la misma base de referencia:

$$DP_2(r,k) \geq |DP_2(r,*) - DP_2(k,*)|$$

IX. Invariancia respecto a la base de referencia: La Distancia  $P_2$  definida para la comparación entre dos países,  $D(r,k)$ , es invariante respecto a la base de referencia, en cualquier caso; y la distancia calcu-lada de la forma  $|DP_2(r,*) - DP_2(k,*)|$  es invariante respecto a la - base de referencia siempre que ésta sea la misma para los dos países y, - para cada componente, tome el valor máximo, o uno superior a éste, o el valor mínimo, o uno inferior a éste, de la serie de valores de dicho com- ponente.

## LA DP<sub>2</sub> , BASE DE UN CRITERIO DE REPARTO DE FONDOS DE COMPENSACION

El objetivo de la distribución de determinados fondos es el de compensar los desequilibrios que, en el nivel de desarrollo, existen entre unas provincias y otras, o entre unas regiones y otras, según el caso.

Consideramos que la Distancia  $P_2$  es un indicador adecuado para elaborar, en base a sus resultados, un criterio de distribución de fondos de compensación. No entraremos aquí en las distintas formas de reparto que se pueden plantear en relación con la  $DP_2$ , pero sí nos interesa -- justificar la afirmación hecha anteriormente. Es decir, ¿por qué la  $DP_2$  es un indicador adecuado para el fin mencionado?

1º) La  $DP_2$  es un indicador del bienestar, pero se puede aplicar perfectamente a la medición del nivel de desarrollo, puesto que, aunque ambos conceptos, desarrollo y bienestar no sean totalmente equivalentes, la cuestión, a la hora de aplicar el indicador, reside en seleccionar adecuadamente las posibles variables que influyan en el objetivo que se pretende medir, sea éste el nivel de bienestar o el nivel de desarrollo.

2º) La  $DP_2$  es un indicador concebido para medir distancias, -disparidades y, dado que lo que se pretende con los fondos de compensación es reducir las disparidades interprovinciales, por ejemplo, nada mejor que disponer de una medida de tales disparidades.

3º) La  $DP_2$  permite incorporar inicialmente todas las variables que se considere influyen en el nivel de desarrollo, sin que sea necesario

decidir de antemano cuáles son las más importantes, como ocurre en el caso de algunos indicadores sintéticos, entre ellos el que se utiliza para distribuir el Fondo de Compensación Interterritorial. En el caso de la  $DP_2$ , - la única limitación a la hora de introducir las variables iniciales es la existencia de datos, limitación que, obviamente, es ineludible. La mayor o menor arbitrariedad que supone decidir previamente cuáles son las pocas variables que más determinan el nivel de desarrollo no tiene lugar en el método de la  $DP_2$ , puesto que es posible utilizar un número relativamente grande de variables, ya que el propio indicador, a través de un procedimiento iterativo, selecciona las que deben considerarse en el resultado final.

4º) Otra arbitrariedad que se da en el cálculo de algunos indicadores sintéticos la constituye el hecho de decidir previamente las ponderaciones de los indicadores parciales. Sin embargo, en el método de la  $DP_2$ , el factor corrector de cada indicador parcial queda determinado por el propio proceso de cálculo, según la importancia relativa en el indicador global, midiéndose dicha importancia a través de la cantidad de información que el indicador parcial aporta al indicador sintético, o, dicho de otra forma, cantidad de información que el componente correspondiente contiene sobre el objetivo medible, el nivel de desarrollo.

5º) El indicador sintético  $DP_2$  elimina la información redundante, por lo que se puede decir que aprovecha de forma útil toda la información contenida en los indicadores parciales, a diferencia de otros indicadores que no tienen en cuenta la muy posible existencia de correlación entre las variables consideradas.

6<sup>a</sup>) Por último, la  $DP_2$  goza de una serie de propiedades interesantes que parece lógico exigir a todo indicador sintético.

Por todas las razones anteriores, creemos poder afirmar que la  $DP_2$  es una medida adecuada, y lo más neutral posible, para medir el nivel de desarrollo, y por lo tanto, para elaborar, en base a ella, un criterio de reparto de fondos destinados a compensar los desequilibrios, regionales o provinciales, en el nivel de desarrollo.